

Modulare Arithmetik

"Kürzen" ist VERBOTEN

Bsp: $2 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \pmod{6}$

✓

~~$2 = 5 \pmod{6}$~~ ✗

d.h. NICHT beide Seiten durch 4 dividieren

Beispiel 2

$8 + p = 2 \pmod{11} \quad | +3 \quad \text{Was ist } p?$

$8 + 3 + p = 2 + 3 \pmod{11}$

$11 + p = 5 \pmod{11}$

$p = 5 \pmod{11}$

Prüfziffer p für ISBN 3-446-19873- p :

Lösung:

$10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + p = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 250 + p = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 250 - 220 - 22 + p = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 8 + p = 0 \pmod{11} \quad | +3$

$\Leftrightarrow 11 + p = 3 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow \underline{p = 3 \pmod{11}}$

Übung 1 3-446-91873-3 ist keine gültige ISBN

Denn:

$10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + \underline{3} = \underline{0 \pmod{11}}$

$\Leftrightarrow 261 = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow 261 - 220 - 33 = 0 \pmod{11}$

$8 = 0 \pmod{11} \quad \downarrow$

Prüfung nicht bestanden

N.R. $261 \pmod{11} = ?$

TR: $261 : 11 = \underline{23.7} \dots$

$261 - 23 \cdot 11 = \underline{8}$

↑
TR

8 ist der Rest

Übung 2: Wann ist $x-446-91873-3$ gültige ISBN?

$$10 \cdot x + \underbrace{9 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 3 + 3}_{231} = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 10x + 231 = 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \underline{10x = 0 \pmod{11}}$$

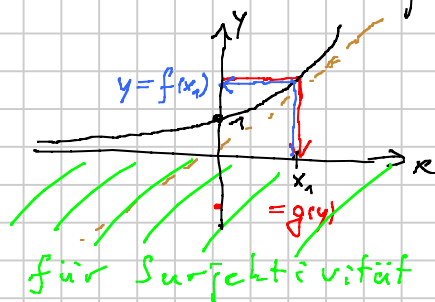
Alle ISBNs mit $x \neq 0$
werden als ungültig
zurückgewiesen.

x	10x	10x mod 11
0	0	0
1	10	10
2	20	9
3	30	8
⋮		⋮
9	90	2

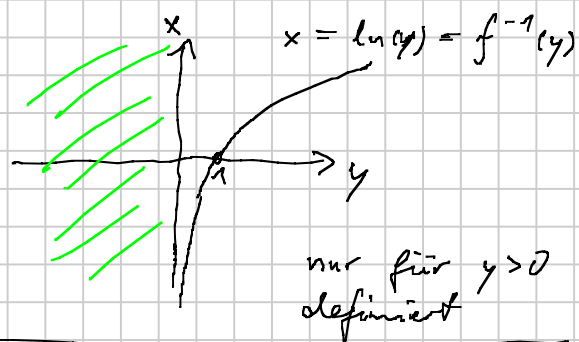
Funktionen

Bsp zu Umkehrfunktionen

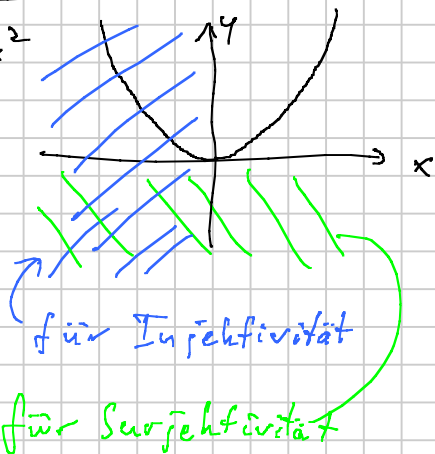
$$f(x) = e^x$$



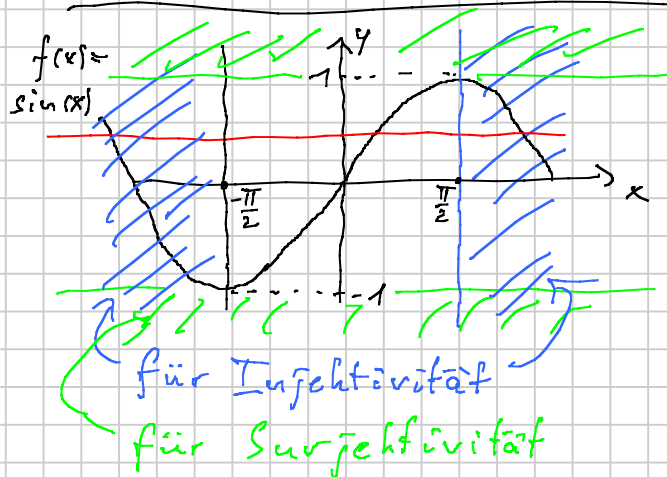
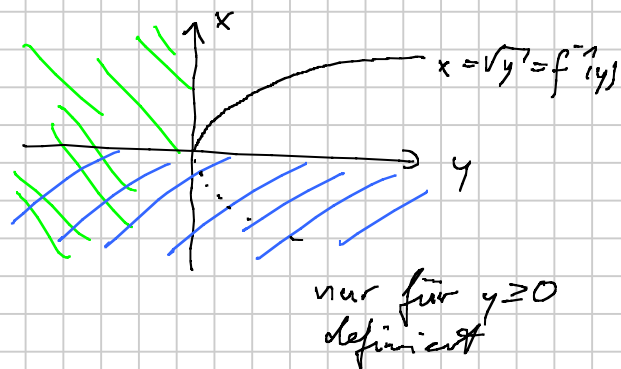
Vertausche
 y und x



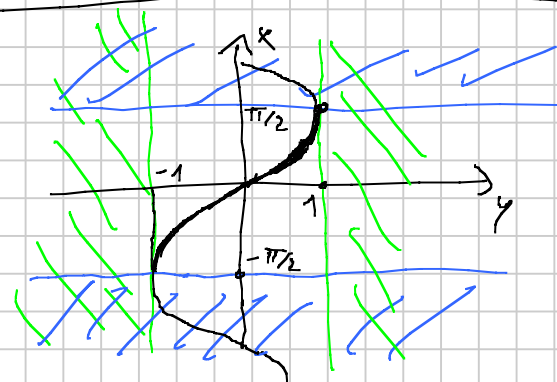
$$f(x) = x^2$$



Vertausche
 $y \leftrightarrow x$



Vertausche
 $y \leftrightarrow x$

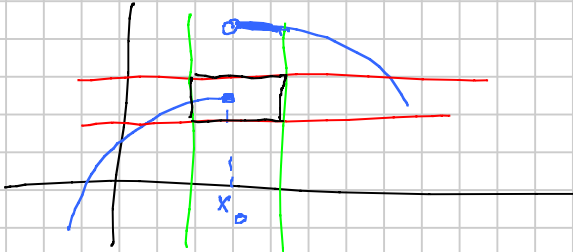


Grenzwert einer Funktion

Bsp: Was ist $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ für $x \rightarrow 0$?

x	± 1	± 0.2	± 0.1	± 0.01	$\rightarrow 0$
$f(x)$	0.841	0.993	0.998	0.99998	$\rightarrow 1$

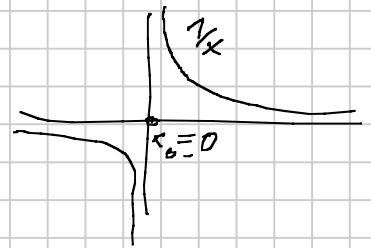
Bsp für "f hat bei x_0 keinen Grenzwert"



Weiteres Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ hat für $x_0 = 0$ keinen Grenzwert

Bew: Nehme eine Folge $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 = 0$

$$\text{Bilde } f(x_n) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$



d.h. $f(x_n)$ ist divergent

$\Rightarrow$ f hat bei $x_0 = 0$ keinen Grenzwert

Beispiel 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Anleihe aus Kap. Taylorreihe $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots \right) = \underline{\underline{1}}$$

Übung

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x+1) \cos(x-1) + \frac{\sin(x-1)}{x+1} \right] \stackrel{\text{Einsetzen}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left[(1+1) \cos(0) + \frac{\sin(0)}{1+1} \right] = \underline{\underline{2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+2}{x-1} - \frac{x^2+2x+3}{x^2-1} \right]$

Einsetzen geht nicht
 $\frac{c}{0}$ -Situation $\Rightarrow \infty - \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\cancel{x^2} + 2\cancel{x} + x + 2 - \cancel{x^2} - \cancel{2x} - 3}{(x-1)(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x+1} \right] \overset{\text{Ersetzen}}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$