

V MA1 16.11.2016

- nächste Woche: Projektwoche - keine V, keine Ü
- danach übernimmt Ane Schmitter
- Peter Wagner → Ü fällt aus
→ Ü Samir Bagheri
- Skript lesen!

Satz von Taylor:



$$\begin{aligned} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ f''(x_0) \end{aligned}$$

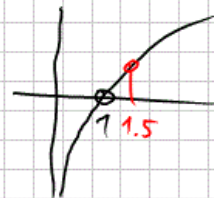
Taylor polynomial ersetzt $f(x)$ durch

$$\text{Polynom } P_n(x-x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Beispiel $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$, Gesucht ist

Taylor-Näherung für $f(1.5)$ zum Grad $n=3$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$ ($x_0=1$)
0	$\ln(x)$	0
1	x^{-1}	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$+2x^{-3}$	+2
4	$-6x^{-4}$	



$$\begin{aligned} P_3(x-1) &= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{(-1)}{2!} (x-1)^2 + \frac{2}{3!} (x-1)^3 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 \end{aligned}$$

$$\ln(1.5) \approx P_3(1.5-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = 0.416$$

Restgliedabschätzung

$$|f^{(4)}(x)| = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4} \quad \text{im Intervall } [x_0, x_1] = [1, 2]$$

ist auf jeden Fall monoton fallend

⇒ mögliche Schranke C ist der linke Rand



$$C = \frac{6}{14} = \frac{6}{x_0^4} = \underline{\underline{6}}$$

Restgliedformel $|R_3(x)| = \frac{6}{4!} (x-1)^4$

für $x=1.5$: $|R_3(1.5)| = \frac{6}{24} \cdot \frac{1}{16} = 0.0156$

Probe: $|\ln(1.5) - 0.416| = 0.0112 \quad \checkmark$

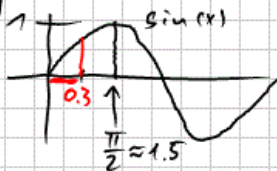
Übung $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 5$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$+\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	0

$$P_5(x-0) = 1 \cdot (x-0)^1 + \frac{(-1)}{3!} (x-x_0)^3 + \frac{1}{5!} (x-0)^5$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Restglied: Was macht $|\sin(x)|$ in Intervall $[0, 0.3]$?



Grobe Abschätzung $C_0 = 1$

Genauer Abschätzung: $\sin(x)$ in $[0, 0.3]$

monoton wachsend $\Rightarrow$ obere

Schranke am rechten Rand

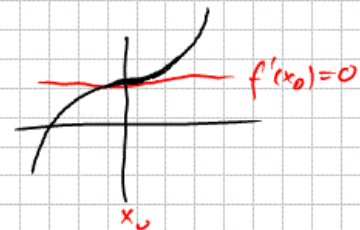
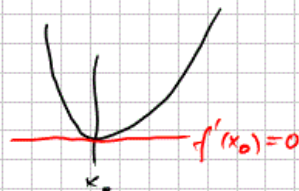
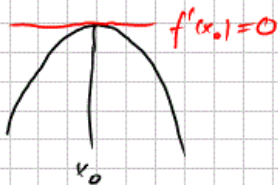
$$C_1 = \sin(0.3) \approx 0.2955$$

$$|R_5(x)| \leq \frac{C}{6!} |x-0|^6$$

für $C=C_1$: $\frac{0.2955}{6!} (0.3)^6 = \underline{\underline{2.9 \cdot 10^{-7}}}$

für $C=C_0$: $\frac{1}{6!} (0.3)^6 = \underline{\underline{1 \cdot 10^{-6}}}$

Extremwerte



Beispiel $f(x) = x^3 - 3x^2$
 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
 $f''(x) = 6x - 6$

Kandidaten für Extrema: $f'(x) = 0$

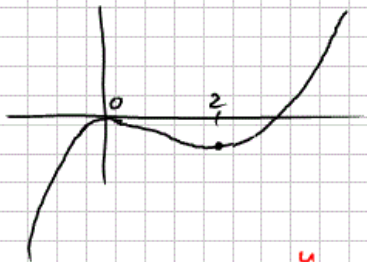
$$\Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Hinreichende Bedingung

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow x = 0 \text{ ist } \underline{\text{Max}}$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = +6 \Rightarrow x = 2 \text{ ist } \underline{\text{Min}}$$



1. Übung $f(x) = x \cdot (x-3)^2$

Nullstellen: Faktorregel

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 0 \vee x = 3}$$

$$f'(x) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} u'v + uv' = 1 \cdot (x-3)^2 + x \cdot 2(x-3) = (x-3+2x)(x-3)$$

$$= (3x-3)(x-3) = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1 \vee x = 3} \quad \text{Kandidaten Extrem}$$

(Alternativ: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow$ Produktregel statt p-q-Formel)

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f''(1) = -6 \Rightarrow \text{Max. bei } \underline{x = 1}$$

$$f''(3) = +6 \Rightarrow \text{Min. bei } \underline{x = 3}$$

$$\text{Wendepunkt: } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$$

$$(f'''(2) = +6 \neq 0) \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

Wendetangente

$$w(x) = f(2) + f'(2) \cdot (x - 2)$$

$$w(x) = 2 + (-3)(x - 2) \\ = \underline{\underline{-3x + 8}}$$

$$f(2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f'(2) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -3$$

2. Übung

$$f(t) = \frac{k}{t} + 100 + 3t^3$$

$$f'(t) = -\frac{k}{t^2} + 9t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 = \frac{k}{t^2} \quad \Leftrightarrow \quad t^4 = \frac{k}{9} = 10\,000$$

$$\Leftrightarrow t = 10$$

$$f''(t) = -\frac{2k}{t^3} + 18t = \frac{2k}{t^3} + 18t > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$\Rightarrow$ Maschine $t=10$ Jahre behalten