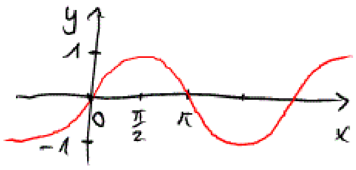
Mathematik 30.11.2016

Wdh.: Taylorentwicklung

Annäherung von Funktionen

Bp. $f(x) = \sin x$



Satz von Taylor

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal differenzierbar

$x_0 \in [a,b]$

$$P_n(x-x_0) = \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt x_0

Taylorpolynom für $f(x) = \sin(x)$ im Entw.pkt. $x_0 = 0$

	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$n=0$	$\sin x$	$\sin 0 = 0$
$n=1$	$\cos x$	$\cos 0 = 1$
$n=2$	$-\sin x$	$-\sin 0 = 0$
$n=3$	$-\cos x$	$-\cos 0 = -1$
$n=4$	$\sin x$	$\sin x = 0$
$n=5$		
$\vdots$		

$$P_1(x-0) = f(0) + f'(0)(x)^1 = x$$

$$P_2(x-0) = f(0) + x + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = x$$

$$P_3(x-0) = f(0) + x + 0 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$$

$$= x + \frac{-1}{6}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

$$P_4(x-0) = x - \frac{1}{6}x^3 + 0$$ keine neue Information

sin x ist punktsymmetrisch

$$P_5(x-0) = f(0) + x + 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5$$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

⋮

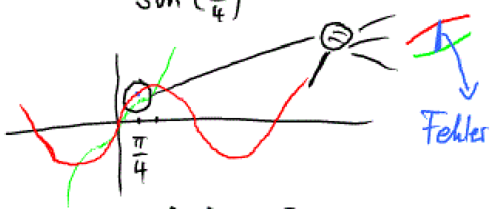
$$P_7(x-0) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

Der Fehler, der bei der Annäherung gemacht wird, liegt in der Größenordnung des ersten nicht berücksichtigten Summanden!

$$|R_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

Tipps für die Wahl von C: Bp. $f(x) = \sin x$ $x_0 = 0$

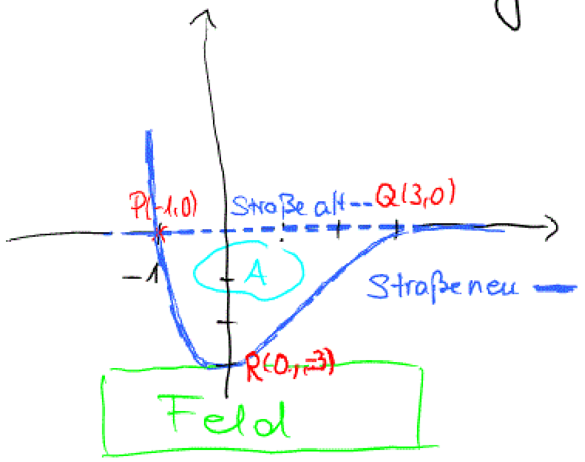
$\sin(\frac{\pi}{4})$



auf $[0, \frac{\pi}{4}]$

Sicherheitshalber: $C = 1$

Lineare Algebra



$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Gesucht: a, b, c, d, e
5 Unbekannte

Die Umgehungsstraße geht durch P, Q und R

Punktprobe mit P(-1,0): $0 = a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + d(-1) + e$
$\boxed{0 = a - b + c - d + e}$

mit Q(3,0): $0 = a\,3^4 + b\cdot 3^3 + c\,3^2 + d\cdot 3 + e$
$\boxed{0 = 81a + 27b + 9c + 3d + e}$

mit R(0,-3): $\boxed{-3 = e}$

Steigung der gesuchten Kurve ist in Q und in R gleich 0

$f'(3) = 0$: $4\cdot a\cdot 3^3 + 3b\cdot 3^2 + 2c\cdot 3 + d = 0$
$\boxed{108a + 27b + 6c + d = 0}$

$f'(0) = 0$: $4\cdot a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2\cdot c\cdot 0 + d = 0$
$\boxed{d = 0}$

Das GS, das zu lösen ist:

$a - b + c - d + e = 0$
$81a + 27b + 9c + 3d + e = 0$
$108a + 27b + 6c = 0$
$\boxed{d = 0 \quad e = -3}$

$$\boxed{\begin{aligned} a - b + c &= 3 \\ 81a + 27b + 9c &= 3 \\ 108a + 27b + 6c &= 0 \end{aligned}}$$

GS für den Gauß'schen Lösungsalgorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 81 & 27 & 9 & 3 \\ 108 & 27 & 6 & 0 \end{array}\right)$$ erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 81 & 27 & 9 \\ 108 & 27 & 6 \end{pmatrix}$$ Unbekanntenvektor: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{x}$

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b}$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Begriffe, die erläutert werden müssen:

- Vektor
- Matrix
- Matrizenmultiplikation
- Umformung von Matrizen
- Determinanten

Lösung der Eingangsaufgabe:

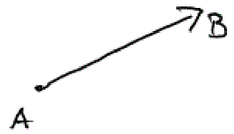
$$f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x^2 - 3$$

Vektorrechnung

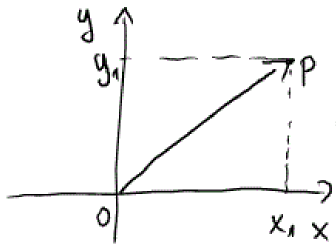
Skalare: Zahlen mit Maßeinheit

z.B. Temperatur, Länge etc.

Vektor: zusätzliche Angabe einer Richtung

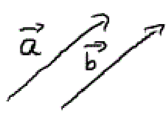


$\vec{AB}$

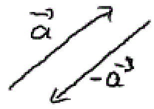


$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

freie Vektoren



parallel



invers

Spezielle Vektoren:

Nullvektor $\vec{0}$

$|\vec{0}| = 0$ Länge 0

Einheitsvektor $\vec{e}$

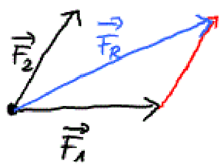
$|\vec{e}| = 1$ Länge 1

Ortsvektor $\vec{OP}$

0 Koordinatenursprung

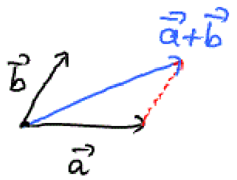
Addition von Vektoren

Bsp: (Physik)

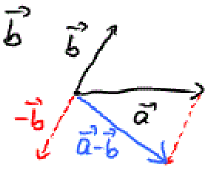


Kräfteparallelogramm

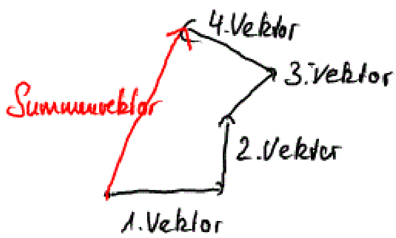
allgemein



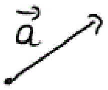
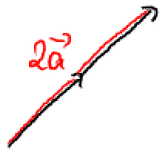
$\vec{a} - \vec{b}$



Vektorpolygon

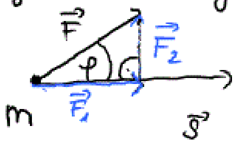


Multiplikation mit einem Skalar:

$\vec{a}$  $\longrightarrow$ $2\vec{a}$? 

Skalarprodukt

Herleitung (aus der Physik)



$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Arbeit: $|\vec{F_1}| \cdot |\vec{s}|$

$\cos\varphi = \dfrac{|\vec{F_1}|}{|\vec{F}|}$ $\qquad |\vec{F_1}| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi = W$

Skalarprodukt allgemein

$\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\qquad \varphi = \sphericalangle \vec{a}, \vec{b} \qquad 0 \le \varphi \le \pi$

$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ Skalarprodukt Schreibweise: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Ergebnis ist ein Skalar

Frage: Wenn $\vec{a}$ senkrecht auf $\vec{b}$ 

Welchen Wert hat das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Zu Hause: Gilt beim Skalarprodukt das Assoziativgesetz?

Bp: Gegeben: $\vec{a} \cdot \vec{a} = 16$
$\vec{b} \cdot \vec{b} = 25$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$

gesucht: $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$
$$15 = 4 \cdot 5 \cdot \cos\varphi$$

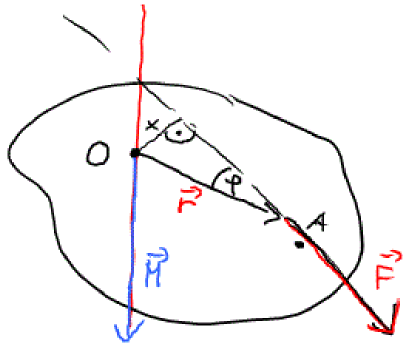
$$15 = 20 \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{3}{4} = 41.4^\circ$$

Vektorprodukt

hergeleitet aus der Physik

$\vec{F}$ bewirkt Drehung



$\vec{r} = \overrightarrow{OA}$

x : Abstand Drehachse ↔ Kraftrichtung $\quad x = |\vec{r}| \cdot \sin\varphi$

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot x = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\varphi$$

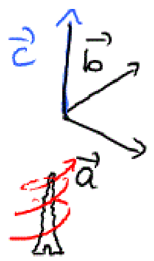
Drehmoment führt auf die Def. des Vektorprodukts

Def: $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\quad \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \quad 0 < \varphi < \pi$

Vektorprodukt ist ein Vektor $\vec{c}$, für den gilt:

1) $\vec{c}$ ist senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$

2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

zu Hause: Ist das Vektorprodukt assoziativ?

Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems

Bsp: Es sei $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b} \iff 3\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$

$\vec a, \vec b$ sind linear abhängig

Def: geg. $\vec b_1, \dots, \vec b_n$

$\vec a$ heißt Linearkombination von $\vec b_1, \dots \vec b_n$

$\Leftrightarrow \vec a = \lambda_1 \vec b_1 + \lambda_2 \vec b_2 + \dots \lambda_n \vec b_n \quad (\lambda_{1,\dots,n} \in \mathbb{R})$

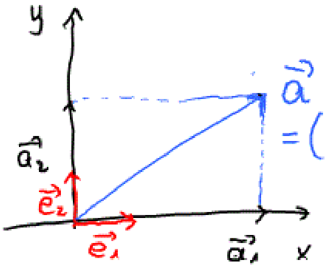
Def: Lineare Unabhängigkeit

$\vec b_1, \dots \vec b_n$ heißen lin. unabhängig

$\Leftrightarrow \lambda_1 \vec b_1 + \lambda_2 \vec b_2 + \dots + \lambda_n \vec b_n = \vec 0$

mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Einführung von Koordinaten:



$\vec a = \vec a_1 + \vec a_2 = |\vec a_1| \cdot \vec e_1 + |\vec a_2| \cdot e_2$

$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$|\vec a_1| = a_1$

$|\vec a_2| = a_2$

$\vec a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\vec a_1 = |\vec a_1| \cdot \vec e_1$

$\vec a_2 = |\vec a_2| \cdot \vec e_2$