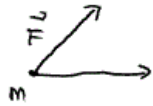


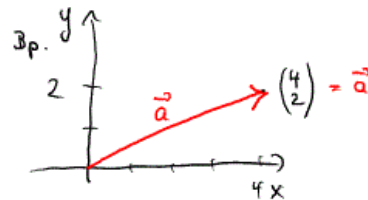
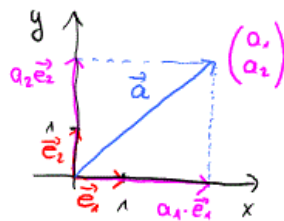
Mathematik Vorlesung

7.12.2016

Wdh. Vektoren



Skalarprodukt
Vektorprodukt

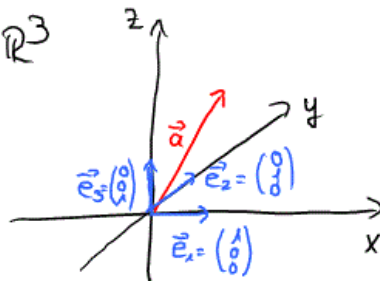


Im $\mathbb{R}^2$ sind $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ Basisvektoren, d.h. alle Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind aus $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ linear zu kombinieren

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ ist Basis} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Was gilt in $\mathbb{R}^3$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bilden Basis im } \mathbb{R}^3$$

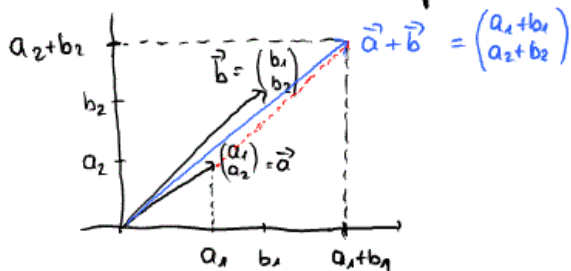
Fortführen in höhere Dimensionen: $\mathbb{R}^n$: die Menge der n -dimensionalen Vektoren

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^n : \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist z.B.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überlegen Sie: Wie werden Vektoren in der Koordinatenschreibweise addiert, subtrahiert, wie sieht das mit dem Skalarprodukt aus?



Vektoraddition in der Koordinatenschreibweise

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

Frage: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{?}$

Es können nur Vektoren derselben Dimension addiert / subtrahiert werden!

Multiplikation mit einem Skalar:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Multiplikation mit $\lambda = 0$ führt auf den Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

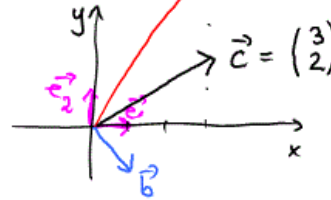
$\mathbb{R}^n$ ist ein linearer Vektorraum

Bemerkungen zur Basis von Vektorräumen

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2 \text{ linear unabhängig}$$

$$\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{geg: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{lin. unabh.}$$



$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I } 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\text{II } 5\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 5\lambda_1 \quad *$$

$$* \text{ in I: } 3\lambda_1 + 5\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad ** \text{ in II: } 5 \cdot 0 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}$ sind lin. unabhängig

Frage: Wie lauten die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

$$\text{Ansatz: } \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Linearkombination aus den neuen Basisvektoren

$$\text{I } 3\lambda_1 + \lambda_2 = 3$$

$$\text{II } 5\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 5\lambda_1 - 2 \quad *$$

$$* \text{ in I: } 3\lambda_1 + 5\lambda_1 - 2 = 3 \Leftrightarrow 8\lambda_1 = 5 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{5}{8} \quad **$$

$$** \text{ in II: } 5 \cdot \frac{5}{8} - \lambda_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{25}{8} - 2 = \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{9}{8}$$

Die Koordinaten bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ lauten $\begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$

Koordinatentransformation

(Bsp. im $\mathbb{R}^3$ auf Üb.bl. 5)

Einheitsvektoren

$$\text{Im } \mathbb{R}^2: \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 Stück

$$\text{Im } \mathbb{R}^3: \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Stück

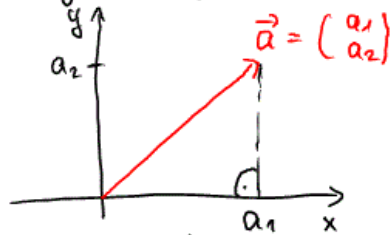
$$\vdots$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^5: \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5 Stück

Die "Länge" des Einheitsvektoren ist immer 1

Berechnung der Länge von Vektoren in der Koordinatenschreibweise



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\text{Länge von } \vec{a} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Das Skalarprodukt von Vektoren in der Koordinatenschreibweise

Def: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

Eigenschaften: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 9 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 4 = 100$$

Achtung: $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{a} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ nicht definiert!}$

Def: Normierter Vektor
 $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad \text{Länge oder Norm}$

Normierter Vektor zu $\vec{a}$ ist: $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ Seine Länge ist 1

Vektorprodukt für dreidimensionale Vektoren in der Koordinatenschreibweise

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

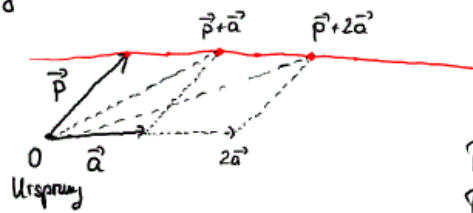
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Determinante $\rightarrow$ später

Geraden, Ebenen, Abstand Punkt-Ebene, Geradenchnittpunkte

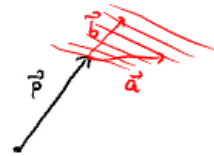
Darstellung mit Hilfe der Vektorrechnung
(Analytische Geometrie)

Einführung:



$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} \quad t \in \mathbb{R}$$

Punkt-Richtungsform einer Geraden
Parameterform einer Geraden

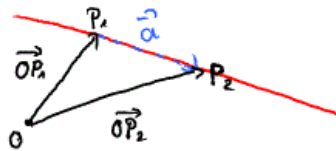


$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig
 $\vec{a}$ und $\vec{b}$ "spannen" eine Ebene auf,
die auf der "Spitze" von $\vec{p}$ liegt

Gegeben: Zwei Punkte in der Ebene.

Gesucht: Gerade durch die Punkte



$$\vec{x} = \vec{OP_1} + t (\vec{OP_2} - \vec{OP_1}) \quad t \in \mathbb{R}$$

Zwei-Punkte-Form

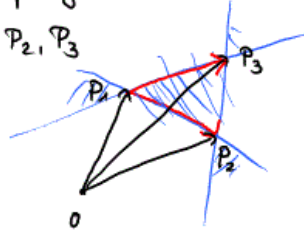
Bp. Geg: $P_1 = (2, 0, 4)$ $P_2 = (2, 2, 2)$ in $\mathbb{R}^3$

Frage: Liegt der Punkt $Q = (2, -2, 6)$ auf der Geraden
durch P_1 und P_2 ?

$$\text{Geradengleichung: } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Prüfen: } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}^{P_2 - P_1} \quad \text{Ausrechnen liefert: } t = -1$$

Gegeben: P_1, P_2, P_3 Ursprung O
 Ebene durch P_1, P_2, P_3



$$\vec{x} = \vec{OP_1} + \lambda (\vec{OP_2} - \vec{OP_1}) + \mu (\vec{OP_3} - \vec{OP_1})$$

Drei-Punkte-Form

Koordinatenform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Frage: Gibt es eine Koordinatengleichung der Form: $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 &= p_2 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 &= p_3 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned}$$

λ und μ werden eliminiert und mit Hilfe von x_1, x_2, x_3 ausgedrückt.

Bsp 1) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ Koordinatenform?

2) E: $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14$ Punkt-Richtungs-Form?

zu 1) $-x_1 + 2x_2 + x_3 + 1 = 0$

Meine Lösung: $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

Ansatz $\begin{aligned} x_1 &= 1 + 5\lambda + 9\mu \\ x_2 &= 2 + 6\lambda + 3\mu \\ x_3 &= 3 + 7\lambda + 9\mu \end{aligned}$

λ und μ mit Hilfe von x_1, x_2, x_3 ausdrücken

$$\lambda = x_2 - x_1 - 1$$

$$\mu = \frac{1}{9}(x_3 + 4 - 7x_2 + 7x_1)$$

zu 2) 3 Punkte auf der Ebene suchen

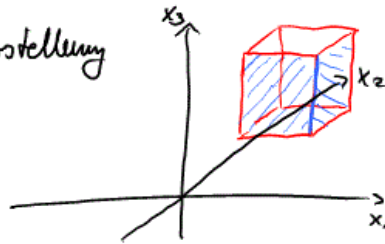
Vorgabe: $x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow x_3 = 5$ Ortsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
 berechnen

2 weitere Punkte suchen, z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren aus den "Differenzen" bilden

$$\text{ergibt hier: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Anwendungen: Würfel darstellung



Weitere Erkenntnisse über "Schnittgeraden" etc.

2 Geraden im 3D-Raum : entweder 1 Schnittpunkt ①
oder parallel ②
oder windschief ③

$$\begin{aligned} \text{Bp: } g_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ g_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Richtungsvektoren nicht parallel, daher ① oder ③ n.o.

Schnittpunktbestimmung : $g_1 = g_2$

$$\text{Ergebnis: } \lambda = 2, \mu = 2$$

$$\text{in Zwischengleichung: } -2 + 12 = 10$$

also: windschief

Weitere Ebenendarstellung : Hesse - Normal - Form

Rückblick: Vektorprodukt : $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$

$\vec{c} = \vec{n}$ heißt Normalenvektor

$$\vec{n} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{n} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

(Skalarprodukt 0
wenn $\perp$)

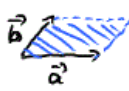
$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0$$

$$n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = 0$$

$$n_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$n_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$n_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Erinnerung: Vektorprodukt $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht der Fläche 

Ausgang: Punkt-Richtungsform einer Ebene mit Richt.vekt. $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{n} := \vec{a} \times \vec{b} \quad \vec{N} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{N} = 0 \quad \vec{b} \cdot \vec{N} = 0$$

und für P und P_1 auf der Ebene

$$\vec{OP} \cdot \vec{N} = \vec{OP}_1 \cdot \vec{N}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OP} \cdot \vec{N} - \vec{OP}_1 \cdot \vec{N} = 0$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = 0 \quad \text{Hesse-Normal-Form der Ebene}$$

Setzt man $\vec{N} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ein in $\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = 0$

und rechnet das aus, so erhält man die Koordinatenform

$$\underline{A}x + \underline{B}y + \underline{C}z = \underline{D}$$