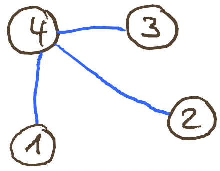
Vorlesung Mathematik 11. 1. 2017

Ich wünsche allen ein gesundes und erfolgreiches neues Jahr!

Hinweis auf SS: Adjazenzmatrix, Inzidenzmatrix

Graph



Matrix

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Rangbestimmung einer Matrix (Vorübung für den Gaußschen Lösungsalgorithmus)

$rg(A)$: Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen (bzw. Spalten)

Bp: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(E) = 4$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Bem. Jede $(m \times n)$-Matrix A kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf eine Zeilenstufenform gebracht werden.

$$A \xrightarrow[\text{endl. Umf.}]{} B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots \\ & 1 & b_{23} & \cdots \\ & & 1 & \vdots \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$ oder Treppenstufenform

Bp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \times Z1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :-16 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 2$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Vert. Z1 mit Z3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +4 \times Z1 \\ \\ \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} -2 \times Z1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & +3 \end{pmatrix} +Z2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2$

2. Möglichkeit

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} +2 \times Z1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} -\frac{1}{2} Z1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} -\frac{1}{2} Z2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2$

Lineare Gleichungssysteme

$$\underbrace{a_1}\,\underbrace{x_1} + \underbrace{a_2}\,\underbrace{x_2} + \dots + \underbrace{a_n}\,\underbrace{x_n} = b_1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

GS wird durch die erweiterte Koeffizientenmatrix dargestellt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Aufgabe: 3 Reisende .....

a: das, was der 1. besitzt
b: " " " 2. "
c: " " " 3. "

$$(73+a+b) = 2(a+b+2c)$$
$$(73+a+c) = 3(a+2b+c)$$
$$(73+b+c) = 4(2a+b+c)$$

$$73+a+b = 2a+2b+4c$$
$$73+a+c = 3a+6b+3c$$
$$73+b+c = 8a+4b+4c$$

$$a+b+4c = 73$$
$$2a+6b+2c = 73$$
$$8a+3b+3c = 73$$

erw. Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{array}\right)$$

Erklärung des Gauß'schen LA anhand eines Beispiels

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1$$
$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 3$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$$
$$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 16$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Pivotelement

Ziel: Treppenstufenform!

Auswahl einer Zeile (Pivotzeile)
Auswahl einer Spalte (Pivotspalte)
Im Kreuzungspunkt: Pivotelement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \times Z1 \\ -3 \times Z1 \\ +2 \times Z1 \end{array}$$

Ziel: unter dem Pivotelement "Nullen" erzeugen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -8 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ \\ \\ \end{array}$$

Ergebnis nach 1. Elimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -8 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +4 \times Z2 \\ -10 \times Z2 \end{array}$$

Ziel: Nullen unter der "1" in Spalte 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :3 \\ \\ \end{array}$$

Ergebnis nach der 2. Elimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -6 \times Z3 \end{array}$$

Ziel "Null" unter "1" in Spalte 3, Zeile 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 42 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ :21 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Nun: Rücksubstitution:

$* \qquad x_4 = 2$

$* \text{ in } Z3: \quad x_3 - \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3} \iff x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$

$x_3 = 0 \quad **$

$* + ** \text{ in } Z2: \quad x_2 - 1 \cdot 0 - \frac{5}{2} \cdot 2 = -2 \iff x_2 = -2 + 5 = 3$

$x_2 = 3 \quad ***$

$*, ** \text{ u. } *** \text{ in } Z1: \quad x_1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -1$

$\iff x_1 = -1 - 6 + 6$

$x_1 = -1$

Lösung des GS: $x_1 = -1, \ x_2 = 3, \ x_3 = 0, \ x_4 = 2$

Bemerkungen zur linearen Unabhängigkeit von m Gleichungen

GS lin. unabh. $\iff rg(A) = m$

Bp:
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 3$

Folgendes kann eintreten:

A lin. unabh. (= voller Rang)
jedoch (A, b) nicht $\Rightarrow$ widersprüchliches GS

Es gilt: Ein lin. GS mit m Gleichungen und m Unbekannten ist eindeutig lösbar $\iff rg(A) = rg(A, b) = m$

Bp: Input / Output-Analyse

$$\begin{aligned} x_L &= 0{,}2\, x_L + 0{,}8\, x_1 + 800 \\ x_1 &= 0.3\, x_L + 0.4\, x_1 + 0.125\, x_2 + 1200 \\ x_2 &= 0.2\, x_L + 0.4\, x_1 + 0.25\, x_2 + 600 \end{aligned}$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
0{,}8\,x_L - 0{,}8\,x_1 &= 800\\
-0.3\,x_L + 0{,}6\,x_1 - 0{,}125\,x_2 &= 1200\\
-0.2\,x_L - 0{,}4\,x_1 + 0.75\,x_2 &= 600
\end{aligned}
}
$$

$\downarrow$

Zugehörige Matrix
Gauß'scher LA

$$x_1 = 8166\tfrac{2}{3}$$
$$x_2 = 7600$$
$$x_L = 9166.66$$

Lineare GS und Inverse der Koeffizientenmatrix

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$x_1 = b_1^*$$
$$x_2 = b_2^*$$
$$\vdots$$
$$x_m = b_m^*$$

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$
$$E \cdot \vec{x} = \underbrace{A^{-1} \cdot \vec{b}} = \vec{b}^*$$