

Vorlesung Mathematik 18.1.2017

Lin. GS und Inverse der Koeffizientenmatrix

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{GS eindeutig lösbar} \Rightarrow A \text{ quadratisch}$$

bei m Gleichungen $\Rightarrow m$ Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1^* \\ x_2 &= b_2^* \\ &\vdots \\ x_m &= b_m^* \end{aligned}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$$

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

$$\underline{A^{-1}} \cdot A \cdot \vec{x} = \underline{A^{-1}} \cdot \vec{b}$$

$$E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Folgerung: Die Lösung der lin. GS erhält man auch durch Multiplikation (hier von links) der Inversen der Koeff. matrix mit dem Vektor $\vec{b}$.

Berechnung von A^{-1}

$$A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Stelle}$$

Sei A^{-1} bekannt: $\underline{A^{-1} \cdot A} \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{e}_j$

Die Lösung einer GS mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_j$ als Absolutglied ist die j -te Spalte der Inversen der Koeffizientenmatrix.

Um die gesamte Inverse zu erhalten, löst man $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j$ für $j = 1, \dots, m$

Man rechnet somit simultan $A \cdot X = E$
 m -faches lin.-GS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

↓ "äquivalente Umformungen führen auf die Einheitsmatrix" E
 ↑ Werden simultan auch an der Einheitsmatrix durchgeführt A^{-1}

Bp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Gesucht: A^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2z_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{:2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{:2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3 \cdot z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3 \cdot z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1/2 \cdot z_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot z_2} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E A^{-1}

Probe $A \cdot A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten

Zur Erinnerung:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \cdot x_{11} + a_{12} \cdot x_{21} &= 1 \\ a_{11} \cdot x_{12} + a_{12} \cdot x_{22} &= 0 \\ a_{21} \cdot x_{11} + a_{22} \cdot x_{21} &= 0 \\ a_{21} \cdot x_{12} + a_{22} \cdot x_{22} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{äquivalente Umformungen}$$

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$$

Nenner: $D = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$
 $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

D heißt die Determinante von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Determinante einer (3×3) -Matrix

Regel von Sarrus

(nur für (3×3) -Matrizen)

$$\begin{array}{ccccc}
 + & + & + & - & - \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

6 Summanden
mit jeweils 3 Faktoren

Allgemeine Definition

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{mj_m}$$

$P(j)$ = Permutationen des zweiten Index j

$I(j)$ = Zahl der Inversionen der jeweiligen Permutation
("Wieviele Umstellungen von der Ausgangsstellung?")

Exkurs: Permutationen (= Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen)

Bp:	1 Buch		1 Möglichkeit	
	2 Bücher		2 Möglichkeiten	1 · 2
	3 Bücher		6 Möglichkeiten	2 · 3



4 Bücher an den vorhandenen 6 Möglichkeiten jeweils 4 Stellen für das neue Buch

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ Möglichkeiten
 $= 4!$

n Bücher $n!$ (n Fakultät) Möglichkeiten

Betrachtungen zur Determinante einer (4×4) -Matrix

24 Summanden mit jeweils 4 Faktoren

Eigenschaften von Determinanten (A $(m \times m)$ -Matrix)

1) Vertauschen zweier benachbarter Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante
Vertauschen beliebig vieler Zeilen, ändert das Vorzeichen ggf.

$$2) \det(\lambda \cdot A) = \lambda^m \cdot A$$

Einfachere Methoden zur Berechnung einer Determinante

Notwendige Begriffe:

Unterdeterminante $(m-1)$ -ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \Rightarrow |A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$|A|_{ij}$ heißt Minor
insgesamt gibt es m^2 Minoren

Bp: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Berechnen Sie sämtliche Minoren von $|A|$

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |A|_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad |A|_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A|_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad |A|_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |A|_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A|_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6 \quad |A|_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \quad |A|_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 18$$

Adjunkte einer Matrix

Zu jedem Element gehört ein Minor, dem ein Vorzeichen zugeordnet wird nach folgendem Muster

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & & & & & \\ + & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{vmatrix}$$

Die Adjunkte zum Element a_{ij} ist $A_{ij} = (-1)^{i+j} |A|_{ij}$

Def: Sämtliche Adjunkten zusammengefasst zu einer Matrix und dann die Transponierte ergibt die Adjungierte Matrix

Entwicklungssatz von Laplace

Entwicklung nach einer Zeile bzw. einer Spalte mit Hilfe von Unterdeterminanten

Bp: $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ \underset{+}{4} & \underset{-}{2} & \underset{+}{-1} \\ \underset{-}{-2} & \underset{+}{3} & \underset{-}{1} \end{pmatrix}$ Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Entwicklung nach der 3. Spalte}$$

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 + 8 = 12$$

Entwicklungssatz von Laplace ermöglicht die Berechnung m -reihiger Determinanten durch Berechnung $(m-1)$ -reihiger Determinanten etc.

Tipp: Auswahl von Zeilen bzw. Spalten mit möglichst vielen Nullen

Bp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = ?$

Entw. nach der 4. Zeile

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Entw. nach der 1. Zeile

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entw. 3. Spalte Entw. 3. Zeile

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\downarrow} -(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1 + 1 = 0$$

Tipp: Vereinfachen der Matrix vor der Determinantenberechnung

z.B. erst Dreiecksform erzeugen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & & \\ 0 & 0 & a_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{mm}$$

Fortlaufendes Entwickeln nach der ersten Spalte

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2m} \\ 0 & \ddots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \ddots & a_{mm} \end{vmatrix} = \dots$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{mm}$$

Determinantenberechnung durch Triangulieren

Bp:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Triangulieren}} \det A = -36$$

Anwendung der Determinanten

Darstellung der Inversen einer Matrix A ($m \times m$)

Vor: Matrix regulär (besitzt eine Inverse, voller Rang)

$$A^{-1} = \frac{A_{\text{adj}}}{\det A} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{m1}}{\det A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1m}}{\det A} & \dots & \dots & \frac{A_{mm}}{\det A} \end{vmatrix}$$

Zur Lösung von Lin.-GS (Alternative zum Gauß Alg.)
Cramer'sche Regel

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

hat die Lösungen

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

A_j ist A mit $\vec{b}$ in
der j -ten Spalte