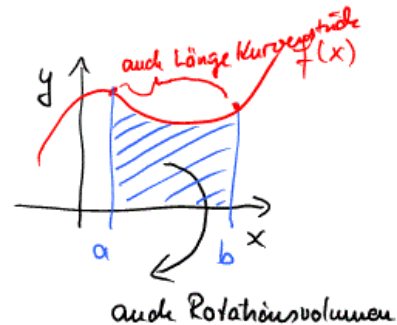
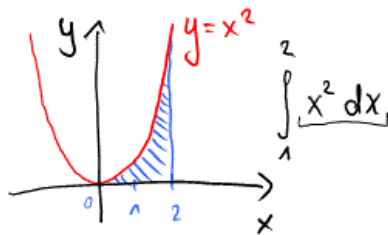


Letzte Mathematik-Vorlesung im WS 25. 1. 2017

Integralrechnung

"Fläche unter einer Kurve"

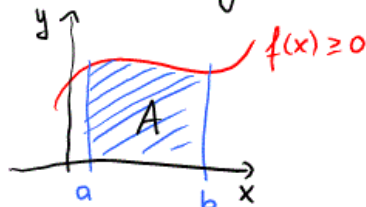


Zwei Herangehensweisen:

- 1) Umkehrung der Differentiation
"Ableiten — Auflösen"
 $f(x) \Rightarrow f'(x)$
 $f'(x) \Rightarrow ?$

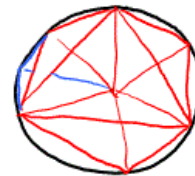
- 2) Zur Flächenberechnung unterhalb bzw. zwischen Kurven

Das bestimmte Integral

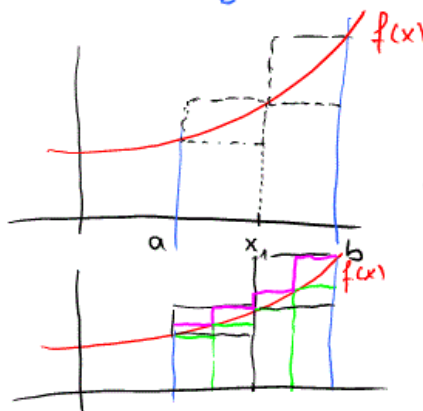


$$A = ?$$

Erinnerung Kreisfläche



Annäherung
durch
Dreiecksflächen
zunehmende
Eckenzahl



Untersumme besteht aus der Fläche
der beiden unteren Rechtecke

Obersumme besteht aus der Fläche
der beiden oberen Rechtecke

gesuchte Fläche A : $U < A < O$

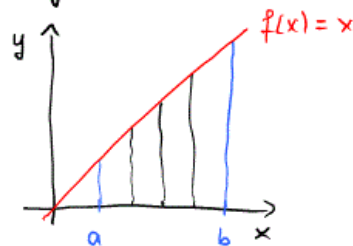
Man bildet also einen Grenzwert

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \underbrace{f(x_k)}_{\text{Höhe des Rechtecks}} \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{\text{Breite des Rechtecks}}$$

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{heißt das bestimmte Integral in den Grenzen } a \text{ bis } b$$

Bp. $f(x) = x$ $A = \int_a^b x dx$



$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$\text{Zerlegungspunkte: } x_k = a + k \cdot \Delta x \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x \quad (\text{Untersumme})$$

↓ da $f(x) = x$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_{k-1} \cdot \Delta x \quad = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a + (k-1) \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a \cdot \Delta x + (k-1) \cdot (\Delta x)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a \cdot \Delta x + \sum_{k=1}^n (k-1) \cdot (\Delta x)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \cdot \sum_{k=1}^n (k-1) \right) \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow \infty}} \right\} \text{ "Verschiebung"}$$

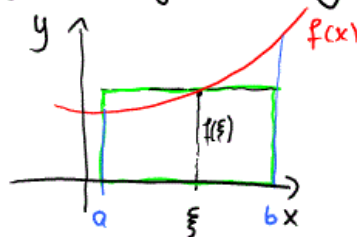
$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \quad \checkmark \text{ des Summationsindex} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Delta x \left(n \cdot a + \Delta x \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \right) \\
 &\stackrel{\Delta x = \frac{b-a}{n}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n} \left(n \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b-a \left(a + \frac{b-a}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right) \right) \right) \\
 &= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2} \\
 &\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}
 \end{aligned}$$

Stichwort:
Summe der ersten n natürlichen Zahlen
hier: $n-1$
"arithmetische Summe"

NR: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = 1$

Grundlegende Eigenschaften wie Linearität etc. klar

Mittelwertsatz der Integralrechnung



$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) \cdot f(\xi)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 A Flächengleiches Rechteck

Das unbestimmte Integral

Gesucht $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

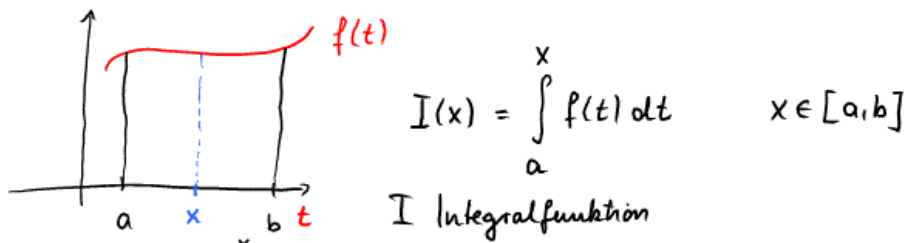
$$(F(x) + C)' = f(x)$$

$F(x)$ ist unbestimmt

$F(x)$ heißt die Stammfunktion von $f(x)$

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

Vorgang des Integrierens: Aufsuchen einer Stammfunktion

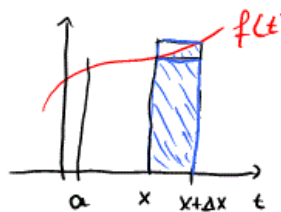


Sei $I_1: x \mapsto \int_{c_1}^x f(t) dt$

$I_2: x \mapsto \int_{c_2}^x f(t) dt \quad x, c_1, c_2 \in [a, b]$

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \int_{c_1}^x f(t) dt - \int_{c_2}^x f(t) dt \\ &= \int_{c_1}^x f(t) dt + \int_x^{c_2} f(t) dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt \end{aligned}$$

Sei nun $I(x) = \int_a^x f(t) dt$



$$x \rightarrow x + \Delta x$$

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x)$$

$$\underbrace{f(x) \cdot \Delta x}_{\text{kleine RE}} \leq \Delta I \leq \underbrace{f(x + \Delta x) \cdot \Delta x}_{\text{großes RE}}$$

$$f(x) \leq \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq \frac{f(x + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x)$$

$$f(x) \leq \boxed{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x)}{\Delta x}} \leq f(x)$$

$$= I'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = I'(x)$$

Hauptsatz der Diff. + Int. rechnung

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{von } f(x) \text{ ist eine Stammfunktion zu } f(x)$$

$$\text{und es gilt: } I'(x) = f(x)$$

$$\text{Folgerungen: } \int_a^b f(x) dx$$

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

$$\int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow -F(a) = C$$

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

$$x=b \quad \boxed{\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)}$$

Als nächstes: Auffinden von Stammfunktionen

Aus bekannten Ableitungen: ($C \in \mathbb{R}$)

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Was macht man mit $\int x \cdot e^x dx$?

Produkt von Funktionen?

Regel: Partielle Integration – Produktintegration

Herleitung: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)$$

Integration
auf beiden
Seiten

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int (f(x) \cdot g(x))' dx - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int x \cdot e^x dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x & g'(x) &= e^x \\ f'(x) &= 1 & g(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = e^x (x - 1) + C$$

Tipp: Richtige Wahl, dass "partiell" Integral einfacher wird

Hinweis: Partielles Integral kann nochmals nur mit Produktintegration gelöst werden z.B. $\int x^2 \cdot e^x dx$

Bp: $\int x \cdot \sin x dx$ $\begin{aligned} f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \sin x & g(x) &= -\cos x \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x dx &= -x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cdot \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

• $\int \sin x \cdot \cos x dx$ $\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f'(x) &= \cos x \\ g'(x) &= \cos x & g(x) &= \sin x \end{aligned}$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x dx \quad \Bigg| + \int \cos x \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \sin x \cdot \cos x dx = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

zu Hause: $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$

Integration durch Substitution (vgl. Differentialrechnung Kettenregel)

Bp: $\int \sqrt{x^2 + 2} \cdot 2x \, dx$

Substitution: $z = x^2 + 2$ $\frac{dz}{dx} = z' = 2x$

$dz = 2x \, dx$

$$\rightarrow \int \sqrt{z} \, dz$$

$$= \int z^{\frac{1}{2}} \, dz = \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}} + C$$

Bp: $\int x \cdot e^{-x^2} \, dx$

$\frac{2}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}} + C$ $C \in \mathbb{R}$

Rücksubst.

$$= -\frac{1}{2} \int \underbrace{-2x} \cdot \underbrace{e^{-x^2}} \, dx \quad z = -x^2 \quad \frac{dz}{dx} = -2x$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^z \, dz \quad dz = -2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^z = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Rücksubstitution

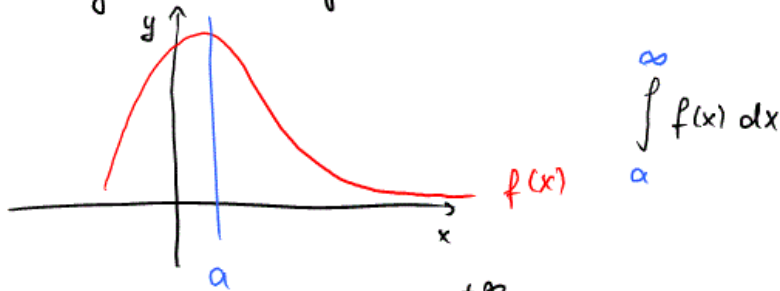
$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx \quad z = \ln x$$

$$= \int z \, dz \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Rücksubst.

Uneigentliche Integrale



oder $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ oder $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Falls die Grenzwerte existieren, z.B. $\lim_{b_n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$

Bp: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ Zunächst: $\int_1^b \frac{1}{x^4} dx = \int_1^b x^{-4} dx$ uneigentliches Integral

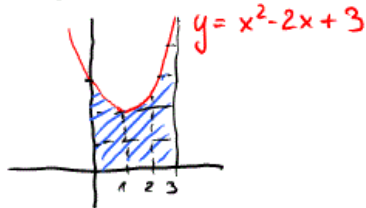
$$= \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^b = \frac{b^{-3}}{-3} + \frac{1^{-3}}{3} = -\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

↓
0

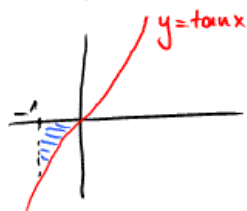
Anwendungen der Integralrechnung

1) Flächeninhalt

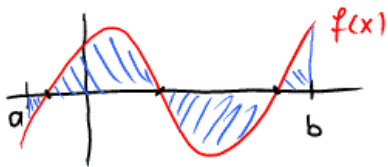


$$\int_0^3 (x^2 - 2x + 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_0^3$$

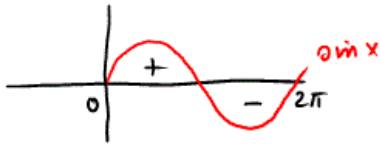
$$= \dots = 9 \text{ FE}$$



$$\left| \int_{-1}^0 \tan x dx \right| = \dots = 0.616$$



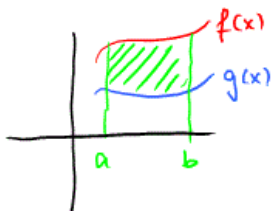
1. Schritt : Nullstellen berechnen
und von NST zu NST betragsmäßig



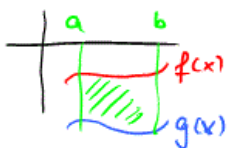
$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$

Falls Fläche gefragt: $2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven



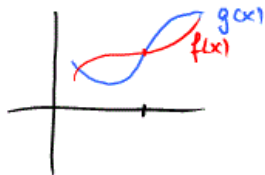
$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$$



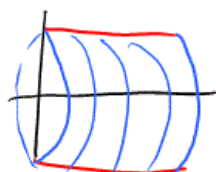
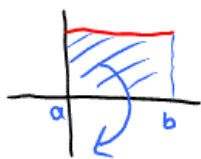
gilt immer, falls $f(x) > g(x)$ auf $[a, b]$

Zu Hause: drüber nachdenken, Fälle durchspielen

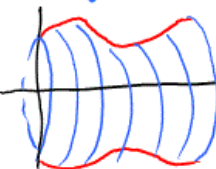
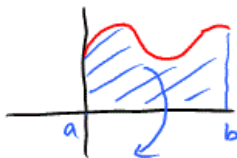
Achtung



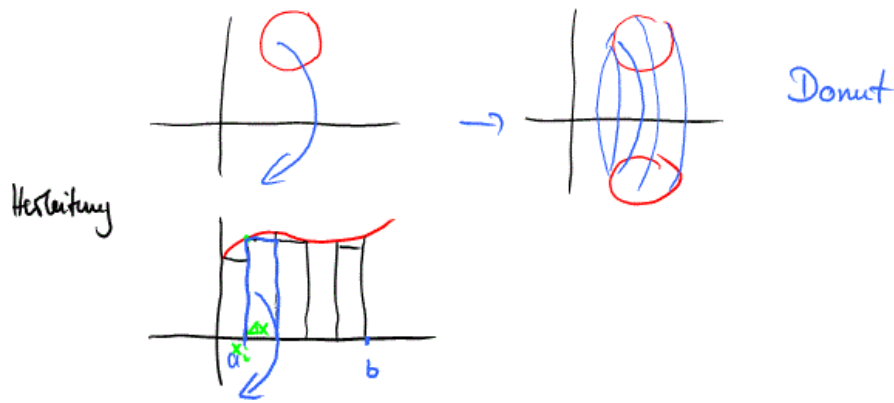
Rotationskörper (Drehung um x-Achse)



Zylinder



Vase
Baumkuchen



bei Rotation: Zylinder

$$\text{Volumen } V_i : \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

$\Downarrow$
 Volumenformel
 für Drehung
 um x-Achse

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$

Vielen Dank!