Bereiten Sie die Aufgaben für den 01./02.11.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Übungsblatt 2

Summen

Aufgabe 2.1 Rechnen mit Summen

a) Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

(i) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{2n\cdot 2(n+1)}$

(ii) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\ldots-\frac{1}{100^2}$

b) Berechnen Sie folgende Summen

(i) $\sum_{k=1}^{10}(5k+7m)$

(ii) $\sum_{k=1}^{100}(3k+5)$ (Hinweis: Was ist $\sum_{k=1}^{100}k$? → Formelsammlung oder geschickte Umformung!)

c) Man berechne $\sum_{k=1}^{201}\frac{1}{k+2}-\sum_{k=4}^{204}\frac{1}{k-2}$

Aufgabe 2.2 Doppelsummen

Berechnen Sie

a) $\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=3}^{4}(k-2)\cdot i$, b) $\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=-5}^{5}\left[\ln(k^2+k)\cdot i\right]$,

c) $\sum_{m=2}^{6}\sum_{n=0}^{39}(mn-2m-4)$

Aufgabe 2.3 Pascal'sches Dreieck

Stellen Sie das Pascal'sche Dreieck bis n=6 auf und berechnen Sie damit $(2-c)^6$.

Folgen

Aufgabe 2.4 Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

Bestimmen Sie die Grenzwerte g der Folgen $(a_n)_{n\in N}$ bzw. $(a_k)_{k\in N}$

a1) $a_n=\frac{1-5n^2}{1-8n^2}$ a2) $a_n=\left(7-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ a3) $a_k=\left(\frac{1-2k}{4k+2\sqrt{k}}\right)^3$

a4) $a_n=\frac{9\cdot 10^n+4\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n/2}+50\cdot 10^{2n-1}}$

b) $a_n = n\left(ln(n) - ln(n+3)\right)$ Hinweis:Benutzen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

c) $a_k = \dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2} - \sqrt{2k-3}}$ d) $a_k = \sqrt{k+2} + \sqrt{k+5}$ e) $a_k = \sqrt{k+2} - \sqrt{k}$

Aufgabe 2.5 Weitere Grenzwerte

Berechnen Sie den Grenzwert:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{1+4n} - \dfrac{n^2}{2n-2}\right)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\binom{n}{2}}{n(n-2)} + \left(\dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{2n^2}{2n-1}\right)\right)$

Aufgabe 2.6 - entfällt -

Aufgabe 2.7 Fixpunkt-Iteration

Bestimmen Sie mittels Fixpunkt-Iteration[2] eine näherungsweise Lösung der nachfolgenden **transzendenten Gleichungen**:

a) $x \ln x = 50$ b) $\frac{1}{2}x - 5 = \ln x$ c) $\sin(x) = 2(x+1)$

Machen Sie nach jedem Schritt die Einsetzprobe, bis die jeweiligen Gleichungen auf der rechten und linken Seite nicht mehr als ±0.1 auseinander sind.

OPTION: Testen Sie (mit Excel oder Maple) *verschiedene* rekursive Folgen (also verschiedene Wege, nach x aufzulösen) aus. Was funktioniert, was nicht?

Aufgabe 2.8 O()-Notation

(a) Ordnen Sie den Folgen ein möglichst einfaches und "billiges" O(B) zu.
(b) Schreiben Sie die Folgen in der Form "führender Term + O(B)".

	Folge	(a)	(b)
	$2n^3 - n^2$	***$O(n^3)$***	***$2n^3 + O(n^2)$***
(i)	$120n^5 + n^8 - n^7$		
(ii)	$\dfrac{n^4+n^2}{n-1} - \dfrac{n^4+2n^2}{n+1}$		

[2] Bringen Sie also die Gleichung in eine Form $x = g(x)$ (*mehrere* Möglichkeiten!), wählen Sie einen (oder verschiedene) Startwerte x_0 und bilden Sie die rekursive Folge $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = \dots$

(iii)	$2n\cdot\sin(n) + n^2\cos(n)$		
(iv)	$n\lg(n)\cdot(-1)^n + 4n$		

(c) Entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3 in nachfolgender Tabelle: Welcher Algorithmus ist jeweils für große n schneller?

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 - 5$
Fall 2	$A'_n = 100n + \dfrac{n^2}{10!}$	$B'_n = \dfrac{3n^2 - 5}{10!}$
Fall 3	$C_n = \dfrac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50}$	$D_n = \dfrac{(n+1)!\,n}{(n-1)!\,(n+1)^2}$

[Hinweis: Bilden Sie jeweils „Erster / Zweiter"]

(noch) Zahlsysteme

Aufgabe 2.9

Lösen Sie bei (a) – (c) nach x auf und vereinfachen Sie die Terme bei (d) – (f):

(a) $e^x = 2e^{-x+2}$ (b) $\ln(x) + \ln(x+2) = 0$

(c) $\ln(x) - \ln(x+2) = 0$

(d) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ (e) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!}$ (f) $\dfrac{\binom{n}{2}}{n(n-1)}$

Aufgabe 2.10 Modulare Arithmetik / Prüfziffern

a) Berechnen Sie möglichst effizient und ohne Taschenrechner

(i) $(99\cdot236) \bmod 5$ (ii) $(27 + 82\cdot13) \bmod 4$ (iii) $(9^{125} + 567\cdot8 - 1) \bmod 8$

(iv) $(2^{50} + 38) \bmod 4$ (v) $(2^{50} + 38) \bmod 7$

b) Welche Prüfziffer p macht 0-9380-2191-p zu einer gültigen ISBN ?

c) Es wird die ISBN 0-8380-2191-p eingegeben (mit dem p aus Teil b)), also ein Einzelfehler an der zweiten Stelle. Wird der Fehler erkannt?

d) Jetzt passiert noch ein weiterer Fehler an der dritten Stelle, 0-8x80-2191-p wird eingegeben. Für welche Ziffern x wird **kein** Fehler festgestellt?