Übungsblatt 3 **Funktionen**

Zur Bearbeitung der nachfolgenden Aufgaben sollten Sie auch die Inhalte aus dem Kapitel „VORKURSWISSEN: Funktionen“ durchgearbeitet haben bzw. beherrschen!

Aufgabe 3.1 Definitionsbereiche

Geben Sie für die nachfolgenden Funktionen die maximalen Definitionsbereiche in **R** an!

(a) $f(x) = \ln\left(x^2 + 9\right)$, (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^6 - 3x^2}}{(1-x^2)(1+x)}$, (c) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$,

(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x+2} + \dfrac{\sqrt{10-2x}}{9-x^2}$

Welchen Wert hat $f(x)$ in (d)?

Aufgabe 3.2 injektiv, surjektiv, bijektiv

Bestimmen Sie für folgende Funktionen (jeweils mit kurzer Begründung), ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

Für diejenigen Funktionen, die <u>nicht</u> bijektiv sind: Geben Sie eine Möglichkeit an, wie Sie Definitionsbereich und Zielmenge so einschränken können, dass die Funktion bei gleichem Funktionsverlauf bijektiv ist.

[Hinweis: Eine Skizze der Funktion kann helfen!]

(a) $f\colon \mathbf{R}^{\geq 0} \to \mathbf{R}^{\geq 0}$ mit $f(x) = \sqrt{3x}$

(b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = 2\sin(2x) + 3$

(c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq 0 \\ +1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

(d) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = e^{-5x^2 + 10}$

Aufgabe 3.3 Umkehrfunktion

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion für

(a) $y = 3x^2 - 2$

(b) $y = e^{-x^2} = \exp(-x^2)$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich in **R** der Umkehrfunktion an.

Zeichnen Sie (qualitativ) Funktion und Umkehrfunktion. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Maple!

Bereiten Sie die Aufgaben für den 15./16.11.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 3.4 Body-Mass-Index (BMI)

Der Body-Mass-Index ermittelt für eine Person mit Gewicht G (in kg) und Körpergröße K (in m) einen Kennwert gemäß

$$BMI = \frac{G}{K^2}$$

Personen mit BMI ≥ 25 gelten als übergewichtig. – Adrian, genau 1.80m groß, hatte schon immer mit seinem Gewicht zu kämpfen. Jahreszeitlich bedingt schwankt es (Winterspeck!), und zwar mit einem genau sinusförmigen Verlauf, der mit 92 kg am 01. Januar (Silvester und die Weihnachtsfeiertage!) sein Maximum erreicht und am 01. Juli mit 78 kg sein Minimum durchläuft.

(a) Stellen Sie eine Funktion für Adrians BMI in Abhängigkeit von der Jahreszeit auf! Wie drücken Sie 'Jahreszeit' als Variable aus? [Wir wollen hier der Einfachheit halber von einem idealisierten Jahr mit 12 exakt gleichlangen Monaten ausgehen.]

(b) Wie viele Monate gibt es, in denen Adrian vom 1. bis zum letzten Tag des Monats übergewichtig ist? Ermitteln Sie dies auf 2 Arten:
(b1) indem Sie Adrians BMI-Tabelle geeignet aufstellen,
(b2) indem Sie nur <u>genau eine</u> Arcus-Cosinus-Berechnung auf Ihrem Taschenrechner vornehmen (keine weitere sin-, cos- oder sonstige trigonometrische Taschenrechnerfunktion).

(c) Welche Körpergröße müsste Adrian haben, um bei gleichem Gewichtsverlauf genau in einem 7 Monate umfassenden Zeitraum übergewichtig zu sein?
[Hier muss der Zeitraum nicht am Monatsanfang starten bzw. enden]

Aufgabe 3.5 Schnittpunkte

Bestimmen Sie <u>alle</u> Schnittpunkte der Kurven y_1 und y_2:

$$y_1(x) = 2\sin(x), \qquad y_2(x) = 1 - \tfrac{3}{2}\cos^2(x)$$

[Hinweis: $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$ und $s=\sin(x)$ benutzen.]

Aufgabe 3.6 Tangens und Polynom

Man bestimme das Polynom 3. Grades, das bei ½ und bei 1 die Tangensfunktion schneidet und das die gleiche Symmetrie wie die Tangensfunktion hat.

[Symmetrie: die Eigenschaft einer Funktion, gerade oder ungerade zu sein]

Aufgabe 3.7 Cosinus: Blutroter Sonnenuntergang am Äquator

a) Berechnen Sie den Winkel um den sich die Erde in (i) 7 min (b) 60 min dreht, sowohl in Radians als auch in Grad.

b) Blutrot versinkt die Sonne am Äquator im Meer. Wir sitzen im leise schaukelnden Boot und blicken zurück auf die Küste im Osten, an der sich steil ein mächtiger Berg erhebt. Genau um 18:08 erreicht der Schatten der Dämmerung den Saum der Küste und genau 7 Minuten später, um 18:15, verlöscht der letzte Sonnenstrahl an der Spitze des Berges. Wie hoch ist der Berg? (Erdradius = 6000 km)

Wie ändert sich die Lage, wenn wir uns auf dem 50. Breitengrad befinden?

Bereiten Sie die Aufgaben für den 15./16.11.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 3.8 Grenzwerte von Funktionen

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die gesuchten Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x), \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \quad$ für $\quad f(x) = \dfrac{6x^2+6x}{x^2-x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2} g(x), \quad \lim\limits_{x\to 2} g(x), \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) \quad$ für $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-2}}{4\sqrt{x+2}}$

Aufgabe 3.9 Grenzwerte von Funktionen 2

Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{(x-2)^2-9}{(x+2)^2} \right)^3$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{x^2+27}{x^2-9} \right)^6$

(d) $\lim\limits_{x\to 2-} g(x), \quad \lim\limits_{x\to 2+} g(x) \quad$ für $\quad g(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\left(\dfrac{x-2}{|x-2|}+3\right)$