Bereiten Sie die Aufgaben für den 06./07.12.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Übungsblatt 4 **Differentialrechnung**

Aufgabe 4.1 Ableitungen

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und die 1. Ableitung an

(a) $f(x) = ax^2 \sin(x)$ mit $a \in \mathbf{R}$ (b) $f(x) = e^{\sin(x^2)} + e^{\sin^2 x}$

(c) $f(x) = x^x$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-c\cdot x+d}}$ mit c>0 (e) $f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

Aufgabe 4.2

In welchen Intervallen ist f(x) (streng) monoton fallend / wachsend?

In welchen Intervallen ist f(x) konvex / konkav?

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = xe^{-x}$

Hinweis: Argumentieren Sie mit 1. bzw. 2. Ableitung

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Plots in Maple!

Aufgabe 4.3 Taylor-Polynom

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades $P_3(x)$ zu $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$.
Wie lautet die Restglied-Formel für $P_3(x)$ im Bereich $x \in [-0.3, 0.3]$?
Machen Sie die Probe: Stimmt die Abschätzung für $x=0.25$ und $x=0.3$?

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $P_2(x)$ zu $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$.
Wie lautet die Restglied-Formel für $P_3(x)$ im Bereich $x \in [0, 0.5]$?
Machen Sie die Probe: Stimmt die Abschätzung für $x=0.25$?

Bereiten Sie die Aufgaben für den 06./07.12.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 4.4 L'Hospital

Arbeiten Sie die Informationen in Kapitel 5.5 des Skriptes durch und berechnen Sie damit folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x$.

HINWEIS zu (d): Hier muss man erst geeignet umformen, dass ein Ausdruck $\frac{f(x)}{g(x)}$ entsteht. Von den zwei möglichen Arten, dies zu tun, hilft nur eine wirklich weiter!

(e) Betrachten Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right]$. Rechnen Sie ihn aus, (i) indem Sie beide Terme auf einen Hauptnenner bringen und vereinfachen und (ii) indem Sie für beide Brüche getrennt L'Hospital benutzen und dann vereinfachen. ACHTUNG: Es kommt etwas Verschiedenes heraus, also Widerspruch! Wieso ist Methode (ii) falsch?

Aufgabe 4.5 Kurvendiskussion

Führen Sie für folgende Funktionen eine verkürzte Kurvendiskussion durch

- max. Definitionsbereich,
- Grenzwertverhalten bei $\pm\infty$ und bei Definitionslücken,
- Extremstellen,
- Wendepunkte,
- zum Abschluss qualitative Skizze der Funktion machen

(i) $f(x) = x\frac{|x|+1}{x-1}$ **(ii)** $f(x) = ax \cdot \ln(|ax|)$ mit $a > 0$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Maple!

Aufgabe 4.6 Näherungsformel

(a) Leiten Sie die für kleine |x| gültige Näherungsformel $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$ her.

(b) Wie groß ist der Fehler maximal nach Restglied-Formel, wenn Sie g(x) für $x\in[-0.5,0.5]$ durch dieses Polynom annähern? Bzw. wenn $x\in[0,0.5]$?

(c) Verbessern Sie diese Näherungsformel! Wie groß ist der Fehler jetzt?

Skizzieren Sie Funktion und Polynome in Maple!

Aufgabe 4.7 – entfällt –

Bereiten Sie die Aufgaben für den 06./07.12.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 4.8 Extremwerte 1: Dosen

Ein Dosenfabrikant möchte Tomatensuppe im Volumen V je Dose möglichst kostengünstig in zylindrische Konservendosen verpacken (Höhe h, Radius r). Welches Verhältnis h/r wählt er, um die Blechmenge je Dose zu minimieren?

Aufgabe 4.9 Taylor für FPGA

Auf einem FPGA (FPGA = Field Programmable Gate Array, Handy o.ä.) soll die Funktion

$$f(x) = \cos(x) + \sin^2(x/2)$$

nur mit den vier Grundrechenarten angenähert werde. Entwicklungspunkt sei $x_0=0$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_2(x)$.

(b) Wie lautet nach dem Satz von Taylor die Restgliedformel für $|R_2(x)|$, die Sie für jedes x auf Ihrem FPGA rechnen können?

(c) Was gibt die die Restgliedformel für $x=0.5$ und $x=-2$ für einen Wert an?

(d) Wie viele Multiplikationen brauchen Sie für $P_2(x)$ und $|R_2(x)|$ auf dem FPGA je x-Wert?

Hinweis 1: Mit der Formel $2\sin(a)\cos(a) = \sin(2a)$ (an richtiger Stelle eingesetzt!) können Sie sich das Ableiten deutlich vereinfachen.

Hinweis 2: Schätzen Sie im Restglied einfach Sinus und Cosinus durch 1 ab (!)

Aufgabe 4.10 Extremwerte 2: Abstand Graph – Ursprung

Welcher Punkt des Graphen von f(x) hat die kürzeste Entfernung vom Ursprung?

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

(b) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$

HINWEIS zu (b): Additionstheorem benutzen und Zeichnung machen. Man muss nicht unbedingt eine transzendente Gleichung lösen.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 06./07.12.16 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 4.11 Gewinnoptimierung

[optional, wenn Zeit]

In der Betriebswirtschaft haben viele Produkte eine mengenabhängige Erlösfunktion E(x) und Kostenfunktion K(x). Zu maximieren ist der Gewinn G(x) = E(x) – K(x).

Beispiel:

$$G(x) = E(x) - K(x) = 0.25 \cdot (200 - x)x - K(x) \qquad \text{mit}$$

$$K(x) = \begin{cases} 300 + x & \text{für} \quad 0 \le x \le 75 \\ 600 + x & \text{für} \quad 75 < x \le 150 \\ 900 + x & \text{für} \quad 150 < x \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie das globale Optimum von G(x). Hinweis: Ränder beachten!

(b) Plotten Sie G(x) im Bereich $x \in [0,200]$ mit einem Programm Ihrer Wahl (Maple, Excel, R, …) und überprüfen Sie damit das Ergebnis aus (a).

(c) Wenn $p(x)=0.25\cdot(200-x)$ der Preis ist, was ist dann der optimale Preis?