V MA 1 – 25.10.2017

Do, 26.10. Einf MA1-P (E. Lau)
17–19 Uhr, R0.402 PFLICHT
P-Organisation: beate.breiderhoff@th-koeln.de

MA1-Tutorium
Johannes Quach, Maurice Bartoszewicz
Fr 14–16 Uhr, R 3.111
ab 27.10.

Indirekter Beweis

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Bew: Annahme: ($\overline{B}$ gilt $\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots$
$\Rightarrow \overline{A}$)

$\Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

Spezielle Form (Variante): $A = 1$

Zu zeigen: $1 \Rightarrow B$

Bew: Annahme: $\overline{B}$ gilt $\Rightarrow \dots \Rightarrow 0$ (immer falsch)

Reellen Zahlen

Behauptung: $\underbrace{x = \sqrt{2} \text{ ist keine rationale Zahl}}_{B}$ (kein Bruch $\frac{p}{q}$)

Beweis: Indirekten Beweis, Variante $1 \Rightarrow B$

Annahme: $\overline{B}$, d.h. $x = \frac{p}{q}$ sei rationale Zahl

genauer: $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ und p/q nicht weiter kürzbar

$$x^2 = 2$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad (1)$$

$\Rightarrow p^2$ ist gerade Zahl, also p enthält Faktor 2

$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2r \Rightarrow p^2 = 4r^2$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad 4r^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 2r^2 = q^2$

$\Rightarrow$ q^2 ist gerade $\Rightarrow$ q enthält Faktor 2

$\Longrightarrow$ Widerspruch zu: "p/q nicht weiter kürzbar"

Damit $\overline{B}$ Widerspruch $\Rightarrow$ B ist wahr , q.e.d.

Schreibweise Zahlmengen/Intervalle

Intervall	Menge	Beschreibung
$(c,-5) =]c,-5[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid c < x < -5\}$	offene Intervall aller reellen Z. zw. c u. -5
$(-10,-8]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x \leq -8\}$	halboffene " " " " zw. -10 u. -8
$(0, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$	offenes Intervall aller reellen Zahlen zw. 0 u. 5
$(0, \infty) =]0, \infty[$	$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}^+\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$	alle positiven reellen Zahlen

$\mathbb{R}^{\geq 0}$

Logarithmus

$c = \log_b a \iff b^c = a$

$\iff \boxed{b^{\log_b a} = a}$

d.h. $\log_b()$ und "b hoch" hintereinander heben sich weg

$$\boxed{\log_b(b^c) = c}$$

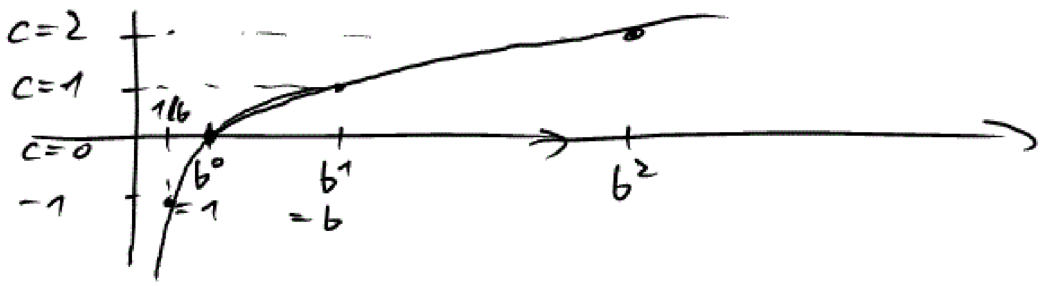
Wie ändert sich $\log_{10} x$ wenn

x	1000	100.000
$\log_{10}(x)$	3	5

b	4	16
$\mathrm{ld}\, b$	2	4

Wie verläuft $\log_b()$?

Aus $\log_b(b^c) = c$ entwickeln



Bsp Berechne ohne und mit Taschenrechner

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}^2}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}^{-2}\right)$$

$$= -2 \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}) \qquad \boxed{\log_b(b^c) = c}$$

$$= -2$$

mit TR:

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{2}\right) \underset{\text{Regel 6.}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\ln(0.5)}{\ln(\sqrt{2})} = -2$$

Ü Berechne $\log_{\sqrt[3]{3}}(27)$ mit und ohne TR

$$\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \qquad 3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$27 = 3^3 = \left(\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3\right)^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^9 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^9$$

$$\log_{\sqrt[3]{3}}(27) = \log_{\sqrt[3]{3}}\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^9\right) = \underline{\underline{9}}$$

mit TR: $= \dfrac{\ln(27)}{\ln(\sqrt[3]{3})} = 9$

Aufgabe Batterie

$$L(w) = 20\%$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{w/T_{halb}} = 0.2 \qquad T_{halb} = 1 \text{ (Woche)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{w} = 0.2 \quad \Big| \log_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{1/2}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{w}\right) = \log_{1/2}(0.2)$$

$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{\ln(0.2)}{\ln(\frac{1}{2})} \approx \underline{\underline{2.322 \text{ (Wochen)}}}$$

Faktorzerlegung

$$x \cdot \underline{b} + x^2 \cdot \underline{b}$$
$$= (x + x^2) \cdot b$$

a) $x^2 - 25 = 0$

$$\underbrace{(x+5)}_{a}\underbrace{(x-5)}_{b} = 0 \qquad L = \{-5, 5\}$$

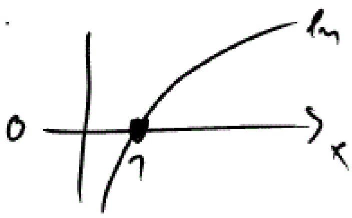
b) $x \cdot \ln(x^2+1) + x^2 \cdot \ln(x^2+1) = 0$

$(x + x^2) \cdot \ln(x^2+1) = 0$

$\underbrace{(1 + x)}_{a} \cdot \underbrace{x}_{b} \cdot \underbrace{\ln(x^2+1)}_{c} = 0$

$L = \{-1, 0\}$ ✓

N.R.



$\ln(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2+1 = 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$

c) $x \ln(x) + x^2 \ln(x^2) = 0$

$x \ln(x) + x^2 \cdot 2 \ln(x) = 0$

$(x + 2x^2) \cdot \ln(x) = 0$

$(1+2x) \cdot x \cdot \ln(x) = 0$

Mögl. Lösungen $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 1$

ABER: $-\frac{1}{2}$ und 0 liegen nicht im Def. bereich von $\ln(x)$

$\Rightarrow \quad L = \{1\}$