V MA1 8.11.2017

Prak- Staffelplan online, ab 14.11.

Gruppen, Termin versäumt

→ beate.breiderhoff@th-koeln.de

Ü Gruppen: besser verteilen

am 15.11. keine Ü 15^{00} (wegen anderer Veranst.)

sonst aber schon

---

a) $$\sum_{k=1}^{m}(A_k \pm B_k) = (A_1 \pm B_1 + \dots + A_m \pm B_m)$$
$$= \underbrace{A_1 + \dots + A_m} \pm \underbrace{(B_1 + \dots + B_m)}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} A_k \pm \sum_{k=1}^{m} B_k$$

b) $$\sum_{k=u}^{o} a = \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{(o-u+1)\text{-mal}} = \underbrace{(o-u+1)}_{s} \cdot a = s \cdot a$$

c) $$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a c_{ik}) = (a \cdot c_{11} + \dots a c_{1m} + \dots a c_{n1} + \dots + a c_{nm})$$
$$= a(c_{11} + \dots + c_{nn})$$

Übung

Formelsammlung

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$$

a) $$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{10} k \cdot i$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{2} k\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{10} i\right) = (1+2) \cdot (1 + \dots + 10)$$
$$= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 3 \cdot 55 = \underline{\underline{165}}$$

b) $\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}\left((ki)^2+5\right) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}\left(k^2\cdot i^2+5\right)$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}(k^2\cdot i^2)}_{\text{separierbar}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} 5}_{12\cdot 5}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{3} k^2\right)\left(\sum_{i=1}^{4} i^2\right) + 12\cdot 5 = 14\cdot 30 + 12\cdot 5 = \underline{\underline{480}}$$

$(1^2+2^2+3^2)\cdot(1^2+\ldots+4^2)$

Binomialkoeffizient

$\binom{100}{50}$ sehr große Zahl

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{2!\;98!} = \frac{100\cdot 99\cdot \cancel{98!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{98!}} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1} = 4950$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \binom{100}{98}$$

Symmetrie

Pascal'sches Dreieck

n \ k	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1

...

Add. theorem

$\binom{2}{1} \stackrel{\downarrow}{=} \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$

$\binom{n}{k}$

1 wg $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Alternativ

1

1   1

1   2   1

1   3   3   1

Übung Pascal'sches Dreieck

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	...				$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0} a^0 b^7 + \binom{7}{1} a^1 b^6 + \dots$$

$$= \cancel{a^0} b^7 + 7a^1 b^6 + 21 a^2 b^5 + 35 a^3 b^4$$

$$+ 35 a^4 b^3 + 21 a^5 b^2 + 7 a^6 b^1 + a^7 \cancel{b^0}$$

Übung Fakultät vereinfachen

(a) $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = \underline{\underline{(n+1)n}}$$

b) $$\frac{1}{\underbrace{n!}_{n(n-1)!}} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} + \frac{n}{n(n-1)!} = \underline{\underline{\frac{1+n}{n!}}}$$

Bsp.: Geg eine n-elementige Menge
Wie viel Teilmengen hat sie

= Anz 0-Teilmengen + Anz 1-Teilm + ... + Anz n-Teilm.

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \underset{\text{Bin. Satz}}{=}$$

$$= \quad (1+1)^n = \underline{\underline{2^n}}$$

Folgen

Beispiele

2) $a_n = 2^n$

d.h. $(a_n) = 2, 4, 8, 16, \dots$ $\qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

3) $a_n = (-1)^n$

d.h. $(a_n) = -1, +1, -1, +1, \dots$

alternierende Folge

4) $a_n = \frac{n}{2^n}$

d.h. $(a_n) = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots$

Die Folge ist ~~streng~~ monoton fallend und beschränkt, da $L=0$ und $K=1$ mögliche Schranken sind

5) $a_n = n$

d.h. $(a_n) = 1, 2, 3, 4,$

Die Folge streng monoton wachsend, n. u. b. (z.B. $L=0$), aber nicht nach oben beschränkt (es gibt kein K)

Beweis zu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad a_n = \frac{1}{n}$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

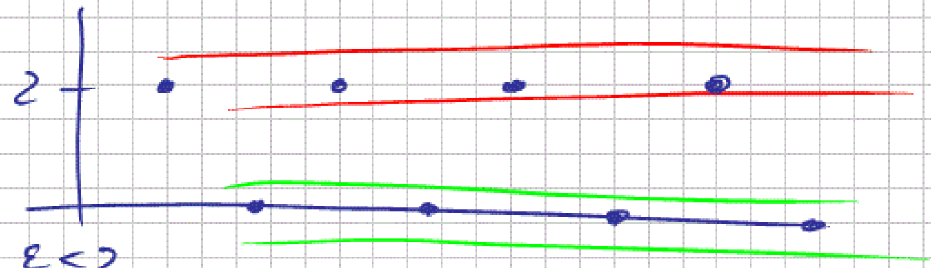
Wenn wir also $n_0(\varepsilon)$ so wählen, daß $n_0(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, so können wir die Grenzwert-Bed. für alle

$n \geq n_0(\varepsilon)$ erfüllen

D.h. z.B. $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow n_0(\varepsilon) = 100$

$\varepsilon = 0.0001 \Rightarrow n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = 10000$

2) zu Bsp $a_n = 2, 0, 2, 0, \ldots$



Für $\varepsilon < 2$

kein ε-Band möglich $\Rightarrow$ divergent