

LV MA 1 15.11.2017

heute 15.11. 2x Ü 13⁰⁰

keine Ü 15⁰⁰

www.meinprof.de - Evaluation

Bsp Folgen

q^n

$$\left. \begin{array}{l} 2^n : 2, 4, 8, 16, \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ 3^n \\ 2.5^n \end{array} \right\} \forall q > 1$$

$$(-2)^n : -2, 4, -8, 16, \dots \rightarrow ?$$

divergent, NICHT bestimmt-divergent

Wieso ist $\infty - \infty$ unentscheidbar?

$$a_n = n, \quad b_n = 2n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - (n+3)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-3) = -3$$

Wieso ist $\frac{\infty}{\infty}$ unentscheidbar?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^4 + 1} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^4}}{1 + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^4}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

g.P.i.N.
 $\frac{1}{n^4}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{2}{1}$$

g.P.i.N.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

g.P.i.V. $\stackrel{\frac{1}{n^2} \text{ erweitern}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\infty}{1} = \infty$

Weitere Bsp

$$1d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0 - 0 = 0$$

$$1e) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \stackrel{\text{Versuch}}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \infty \cdot 0 = ?$$

Neuer Versucher: Hauptnenner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{n+1 - n}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n^2 + n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n} \stackrel{\text{g.P.i.V.}}{=} \frac{1}{1+0} = \underline{\underline{1}}$$

Übungen

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 \stackrel{\text{g.P.i.V.}}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} \right) \right)^2 = \left(\frac{7-0}{3+0} \right)^2 = \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{49}{9}}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3(n-1) - n^3(n+1)}{(n+1)(n-1)} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 - n^3 - n^4 - n^3}{n^2 - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2n^3}{n^2 - 1} \right) \stackrel{\text{g.P.i.V.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2n}{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-2n}{1 - \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{-2 \cdot \infty}{1 - 0} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$4) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k} \cdot 10^{-2}} \stackrel{\text{g.P. ind.}}{=} \cdot 10^{-2k}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k \cdot 10^{-2k} + 6 \cdot 10^{2k} \cdot 10^{-2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} \cdot 10^{-2k} - 0.2 \cdot 10^{2k} \cdot 10^{-2k}} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^{-k} + 6}{0.4 \cdot 10^{-k-3} - 0.2} =$$

$$\frac{75 \cdot 0 + 6}{0.4 \cdot 0 \cdot 10^{-3} - 0.2} = \underline{\underline{-30}}$$

N.R.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 10^{-k} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \quad (q=10)$$

$$= 0$$

↑

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q}\right)^k \text{ mit } q=10$$

Bsp zu Fixpunkt-Iteration

$$x \ln(x) = 27$$

transzendente Gleichung
ist nicht exakt lösbar

mögl. FP-Formen

$$x = \frac{27}{\ln(x)} = f_1(x)$$

$$\text{oder } \ln(x) = \frac{27}{x} \quad | e^{\quad}$$

$$x = e^{27/x} = f_2(x)$$

Landau $O()$ -Notation

<u>Übung</u>	<u>Folge</u>	<u>$O()$</u>
2)	$7n^5 + 26n^6$	$O(n^6)$
3)	$n + 3n^2 - 2n \log(n)$	$O(n^2)$
4)	$\frac{n^4 + n^2}{n+5}$	$O(n^3)$, denn $\frac{a_n}{n^3} = \frac{n^4 + n^2}{n^3(n+5)} = \frac{n^4 + n^2}{n^4 + 5n^3}$ g.P.N. $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$
5)	$\frac{n^4 + n^2}{n+5} - n^3$	<u>$O(n^2)$</u>

$$\begin{aligned} \text{zu 5)} \quad \frac{n^4 + n^2}{n+5} - n^3 &= \frac{n^4 + n^2 - n^3(n+5)}{n+5} = \frac{\cancel{n^4} + n^2 - \cancel{n^4} - 5n^3}{n+5} \\ &= \frac{-5n^3 + n^2}{n+5} \in O(n^2) \end{aligned}$$

Modulare Arithmetik

$+c$ oder $\cdot c$ ist auf beiden Seiten einer mod-Gleichung

ACHTUNG: "kürzen" oder $\frac{1}{c}$ auf beiden Seiten ist bei mod-Gleichung NICHT erlaubt

Denn: es ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot \underline{4} &= 5 \cdot \underline{4} \pmod{6} \\ 8 &= 20 \pmod{6} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aber es gilt nicht

$$2 = 5 \pmod{6} \quad \text{f}$$

Weiteres Beispiel

$$8 + p = 2 \pmod{11} \quad | +3$$

$$\underbrace{3+8}_{11} + p = 3+2 \pmod{11}$$

$$0 + p = 5 \pmod{11}$$

$$p = 5 \pmod{11}$$