$\boxed{\text{V MA1} \quad 6.12.2017}$

ab 19./20.12. Vorlesung + 1 Ü Ane Schnitter

Bsp. zu Grenzwert Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{f. } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ -\dfrac{1}{x} & \text{f. } x < 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ denn für $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{x_n}\right)$

$= -\frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \infty$ (Polstelle) denn für "linksseitiges" $(x_n) = \left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \left(-\frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right) = n \to \infty$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ denn für "rechtsseitiges" $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0+$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \frac{0^2-1}{0-1} = \underline{\underline{1}}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht (S 4-3)

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ denn für $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{(x_n-1)}(x_n+1)}{\cancel{x_n-1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (x_n+1) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ denn für $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} \overset{\checkmark}{=} \lim\limits_{n\to\infty} (x_n+1) = \infty$

Ü Grenzwert

a) $$\lim_{x\to 1}\left[(x+1)\cos(x-1)+\frac{\sin(x-1)}{x+1}\right]$$

$$= (1+1)\cos(0)+\frac{\sin(0)}{1+1} = 2\cdot 1+\frac{0}{2} = \underline{\underline{2}}$$

b) $$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}\right]$$

[Einsetzen direkt geht nicht

$$\frac{1+2}{0}-\frac{1+2+3}{0} = \infty - \infty \quad ↯$$
]

(Hauptnenner)

$(x-1)\;,\;(x^2-1)$

HN?

$(x-1)\;,\;(x-1)(x+1)$

HN: $(x-1)\cdot(x+1)$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(X+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cancel{x^2}+2x+x+2-(\cancel{x^2}+2x+3)}{(x-1)(x+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Beispiel: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

Anleihe aus Kap 5: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$

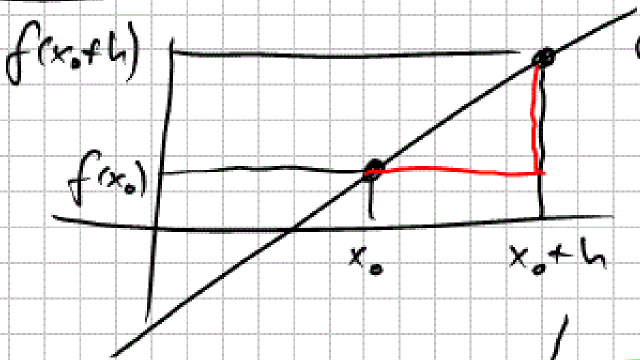
(Taylorentwicklung)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3!}+\frac{x^{\cancel{5}\,4}}{5!}+\dots}{\cancel{x}} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\dots$$

$\lim_{x\to 0}$

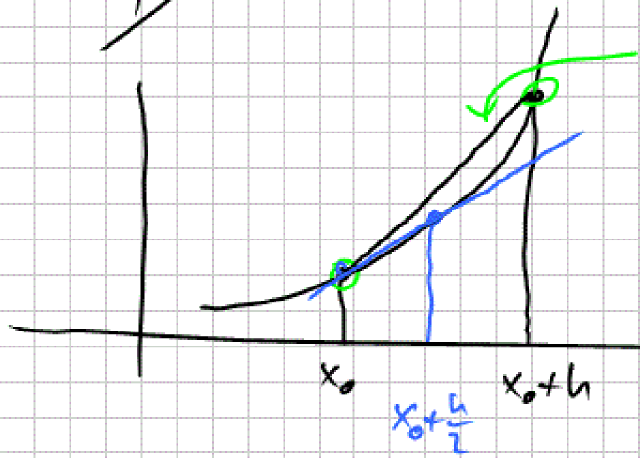
$$= 1-0+0+\dots = \underline{\underline{1}}$$

Differentialrechnung



Gerade $f(x)$

$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



Steigung Sekante ist steiler als Steigung funktion

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

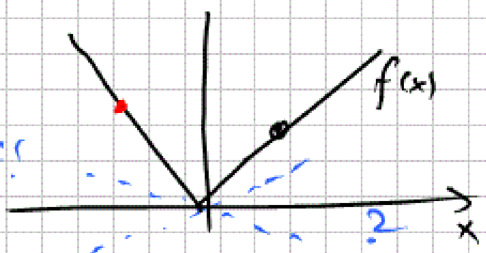
Differentialquotient

Beispiel $\quad f(x) = x^2$

$\qquad f'(x) = 2x$

Beweis:
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{x^2}}{\cancel{h}}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x + 0 = \underline{\underline{2x}}$$

Beispiel 2: $\quad f(x) = |x|$



$f'(0)$ existiert nicht!

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Beispiel Quotientenregel

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)\cdot 2x - x^2\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

N.R.

$u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$

$v(x) = x+1$, $v'(x) = 1$

(Regel $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n > 0$

Tipps zum Ableiten

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(x) = ?$ Empfehlung NICHT über Quotientenregel

$$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^5} = (x+1)^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5(x+1)^{-6}\cdot 1$$

Beispiel Kettenregel

$$h(x) = (\sin x)^3$$

$$= g(f(x))$$

$$h'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$= 3(\sin x)^2\cdot\cos(x)$$

N.R.

$g(u) = u^3 \Rightarrow g'(u) = 3u^2$

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$

Beispiel 2

$$h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2$$

N.R.

$g(u) = u^2 \Rightarrow g'(u) = 2u$

$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \underset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right) = 2\,\frac{x^2(x^2+2x)}{(x+1)^3}$$

Übungen

a) $$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

N.R.

$u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$

$v(x) = (x+1)^2$, $v'(x) = 2(x+1)$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^{\cancel{2}\,1}\cdot 3x^2 - 2\cancel{(x+1)}\cdot x^3}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(x+1)\cdot 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}$$

b) $$f(x) = \sin(x^3)$$

$$= g(f(x))$$

$g(u) = \sin(u)$, $g'(u) = \cos(u)$

$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = \cos(x^3)\cdot 3x^2$$

c) $$f(x) = e^{\sin(x^2)}$$

$$f'(x) = e^{\sin(x^2)}\cdot(\sin(x^2))'$$

$$= e^{\sin(x^2)}\cdot\cos(x^2)\cdot 2x$$

$f(x) = g(k(m(x)))$

$g(u) = e^u$, $g'(u) = e^u$

$k(v) = \sin(v)$

$m(x) = x^2$