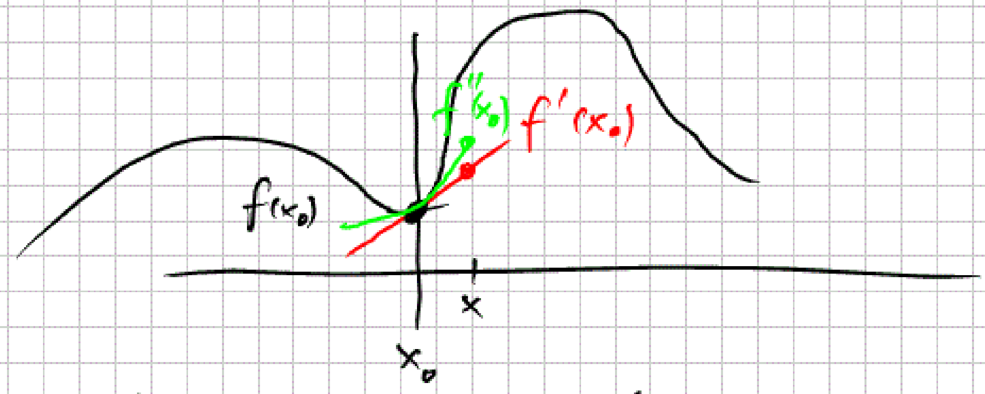
V MA 1 13.12.2017

Satz von Taylor



Welches Polynom n. Grades hat in x_0 die gleichen Ableitungen wie $f(x)$

k	$p^{(k)}(x-x_0)$	$p^{(k)}(x_0-x_0)$	soll gleich sein zu
0	$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$	a_0	$f(x_0)$
1	$a_1 \quad 2a_2(x-x_0) + \ldots + n a_n (x-x_0)^{n-1}$	a_1	$f'(x_0)$
2	$2a_2 + \ldots n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$	$2a_2$	$f''(x_0)$
$\vdots$			
n	$n!\, a_n$	$n!\, a_n$	$f^{(n)}(x_0)$

d.h. z.B. $\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \\ a_2 &= \frac{f''(x_0)}{2!} \end{aligned}\right\}$ bloße Zahlen

Beispiel zu Restglied

bei $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$, $x = 1.5$

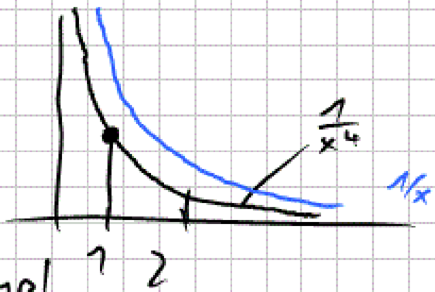
Intervall $x \in [1, 2] = [x_0, x_1]$

Tabelle: (s. Skript)

n	$f^{(n)}(x)$
4	$-6x^{-4}$

Was ist $|f^{(4)}(x)|$ im Intervall $[1,2]$

$$|f^{(4)}(x)| = 6x^{-4} = 6\cdot\frac{1}{x^4}$$



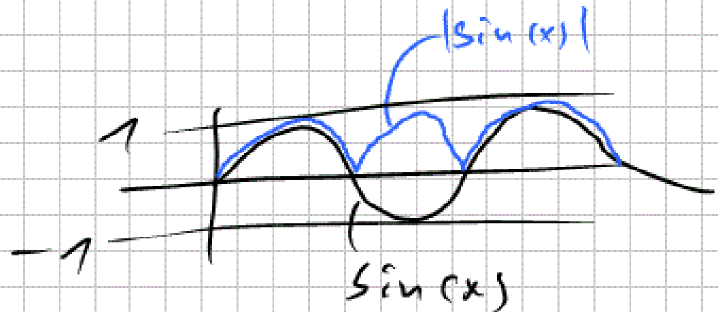
ist (s. Graph) monoton fallend

$\Rightarrow$ $|f^{(4)}(x)|$ am li Rand maximal

$$C = |f^{(4)}(1)| = 6\,\frac{1}{1} = \underline{\underline{6}}$$

andere Bsp

$|f^{(4)}(x)| = |\sin(x)|$



grobe Abschätzung für alle Intervalle $[x_0, x_1]$: $C = 1$

$$|R_3(x)| = \frac{C}{(3+1)!}\,|x - x_0|^{3+1}$$

$$|R_3(1.5)| = \frac{6}{4!}\,|1.5-1|^4 = 0.0156$$

__Übung__ Taylorpolynom zu $f(x) = \sin(x)$ an Stelle $x_0 = 0$ zum Grade 5. Wie genau für $x = 0.3$?

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	−1
4	$+\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$P_5(x-x_0) = f(0) + f'(0)(x-x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$= 0 + 1\cdot(x-x_0) + 0 + \frac{-1}{3!}(x-x_0)^3$$

$$+ 0 + \frac{1}{5!}(x-x_0)^5$$

$$P_5(x) = x + \frac{(-1)}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

$$P_5(0.3) \approx 0.29552$$

Restglied Obere Schranke für $|f^{(6)}(x)|$ im Intervall $[x_0, x] = [0, 0.3]$

$$|f^{(6)}(x)| = |-\sin(x)| = |\sin x| \Rightarrow C = 1$$

ist grobe Abschätzung

$$|R_5(x)| = \frac{C}{6!}|x-x_0|^6$$

$$= \frac{1}{6!}(0.3)^6 \approx 1\cdot 10^{-6}$$

d.h. Taylorpolynom ist auf mind. 6 Stellen genau

L'Hospital-Regel

Bsp.: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

$0/0$-Situation
$\to$ L'Hospital

Bsp Monotonie

$g(x) = \frac{6}{x^4} = 6x^{-4}$ Max in $[1,2]$?

$g'(x) = -4 \cdot 6x^{-5}$ ist in $[1,2]$ immer < 0

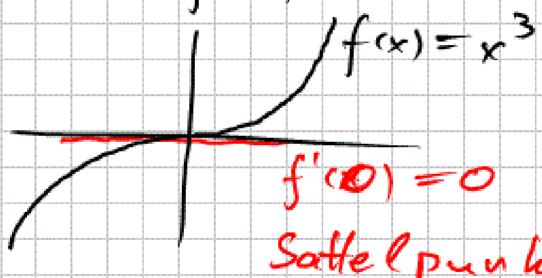
also ist $g(x)$ in $[1,2]$ streng monoton fallend

Bsp Maximum

Wenn Max, dann Steigung 0
$f'(x_0) = 0$

Die Umkehrung "wenn $f'(x_0) = 0$, dann Max" gilt NICHT

Gegenbeispiel

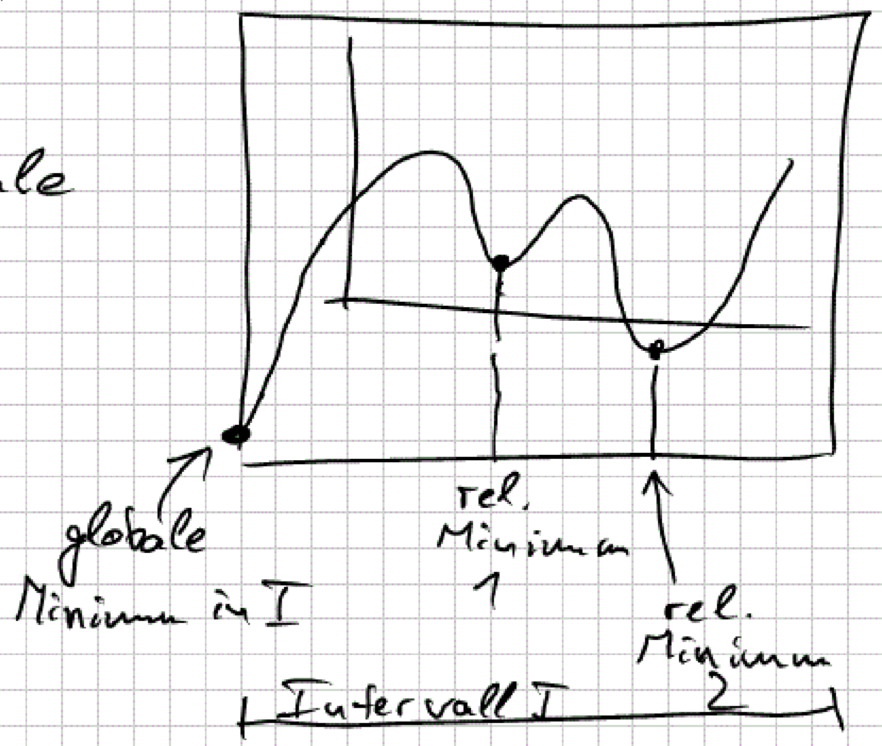


Bsp $\underline{\underline{f(x) = x^3 - 3x^2}}$

<u>Wo liegen (rel.)</u> Maxima u. Minima

Exkurs:

rel. und globale Minima



$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

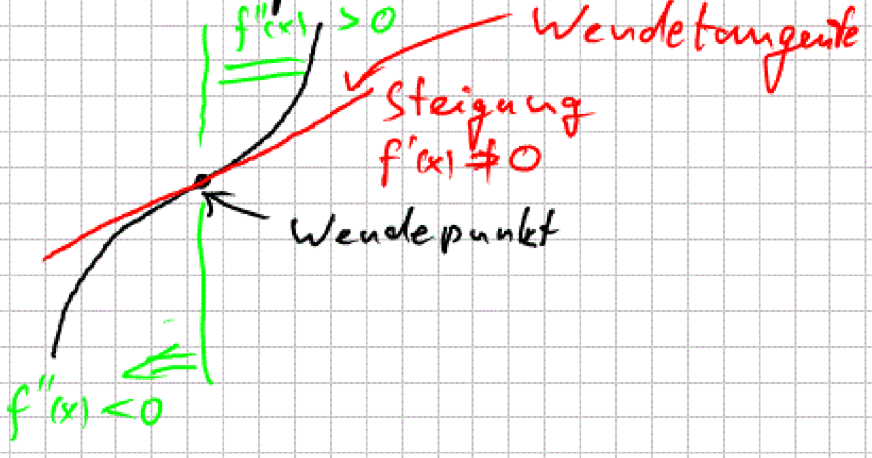
$$3x(x-2) = 0 \iff x_1 = 0 \vee x_2 = 2$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

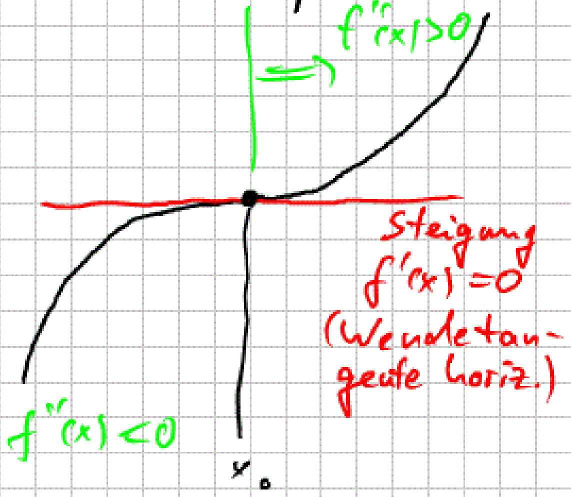
$$f''(x_1) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \text{ rel. Max.}$$

$$f''(x_2) = 6 \cdot 2 - 6 = +6 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}} \text{ rel. Min.}$$

Wendepunkt



Sattelpunkt



Übung

$$f(x) = x \cdot (x-3)^2$$

Nullstellen
Extrema
Wendepkt/-tangente

Nullstellen $\quad x = 0 \lor x - 3 = 0$

$$x_1 = \underline{\underline{0}} \lor x_2 = \underline{\underline{3}}$$

$f(x) = a \cdot b = 0$
$\Leftrightarrow a = 0 \lor b = 0$

$$f(x) = x \cdot (x-3) \cdot (x-3)$$

$f'(x)$ über Produktregel

$u = x \qquad u' = 1$
$v = (x-3)^2 \qquad v' = 2(x-3)$

$$f'(x) = 1 \cdot (x-3)^2 + x \cdot 2(x-3)$$

$$= (x-3)\left[(x-3) + 2x\right]$$

$$= (x-3)\left[3x - 3\right] = (x-3)\, 3 \cdot (x-1)$$

Nullstellen $f'(x)$ sind $\underbrace{x_1 = 3 \text{ und } x_2 = 1}$

↳ Kandidaten für Extrema

$$= 3\left[x^2 - 4x + 3\right]$$

$$f''(x) = 3\left[2x - 4\right] = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x_1) = f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 3$$

$f''(x_2) = f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_2 = 1$

Wendepunkt dort wo $f''(x) = 0 = 6x - 12$

Wendepunkt bei $x_0 = 2$

Wendetangente: $f'(2) = 3[2^2 - 4 \cdot 2 + 3] = -3$

$f(2) = 2 \cdot 1 = 2$

$\Rightarrow w(x) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$

$= -3(x-2) + 2 = \underline{\underline{-3x + 8}}$