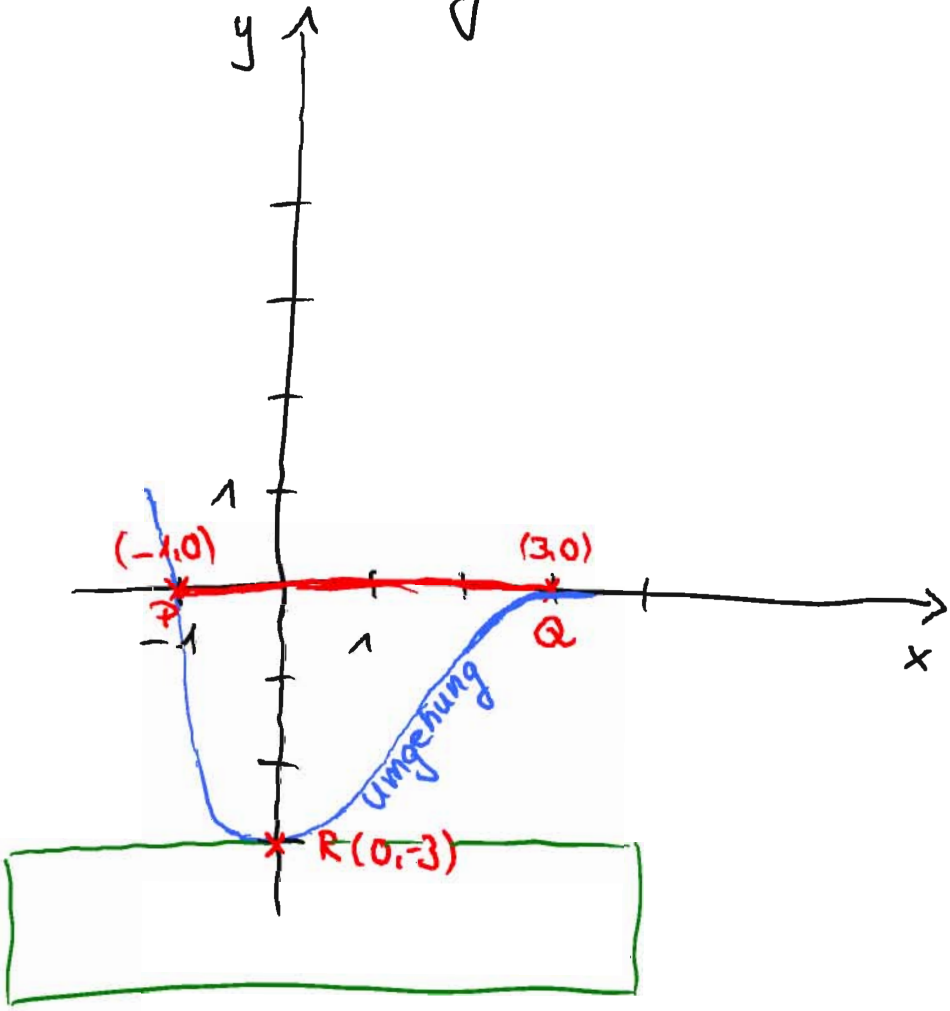
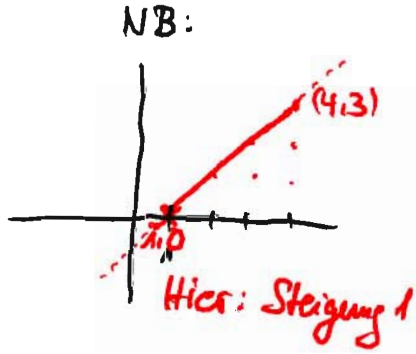
Mathematik 1 Vorlesung

20.12.2017

Lineare Algebra





$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

a, b, c, d, e gesucht

Umgehungsstraße geht durch P, Q und R

Punktproben mit P, Q und R

PP mit P: $0 = a - b + c - d + e$ $\qquad e = -3$

PP mit Q: $0 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$ $\qquad d = 0$

PP mit R: $-3 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 0 + 0 \cdot e$

$-3 = e$

Steigung in Q beträgt 0: $0 = 108a + 27b + 6c + d$

Steigung in R beträgt 0: $0 = 4 \cdot a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d$

$0 = d$

Lineare Gleichungen nochmals auflisten:

$$\boxed{\begin{aligned}
a - b + c - d + e &= 0 \\
81a + 27b + 9c + 3d + e &= 0 \\
0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d + e &= -3 \\
108a + 27b + 6c + d + 0 \cdot e &= 0 \\
0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d + 0e &= 0
\end{aligned}}$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{cccccc}
a & b & c & d & e & \\
\end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
81 & 27 & 9 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{-3} \\
108 & 27 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{0}
\end{array}\right) \quad \begin{array}{l} e = -3 \\ \\ d = 0 \end{array}$$

erweiterte Koeffizienten-Matrix

besteht aus Zeilen bzw. Spalten

Zeilen und Spalten aufzufassen als Vektoren

Ziel: andere Zeilen so umformen, dass auch nur eine 1 drin steht!

$\downarrow$ erlaubte Umformungen

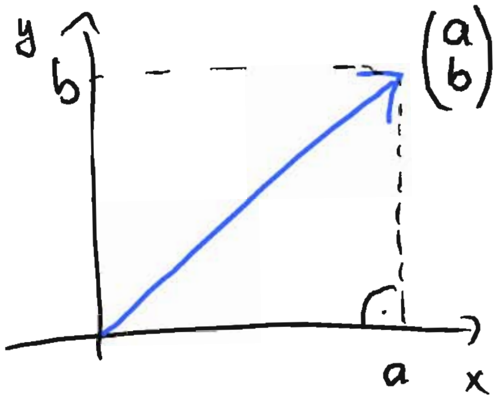
$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Lösung } a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \text{Lösung } b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \text{Lösung } c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Ziel: Treppenstufenform

Elementare Begriffe aus der Vektorrechnung

Was ist ein Vektor?



Koordinatendarstellung

Länge dieses Vektors: $\sqrt{a^2+b^2}$

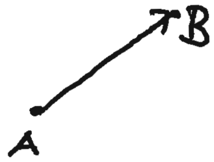
Beim Vektor kommt noch eine Richtung dazu!

freie Vektoren:

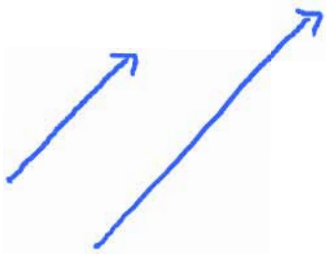
ohne Richtung: Skalare

Vektor: Pfeil, der eine bestimmte Länge hat
<u>und</u> eine Richtung

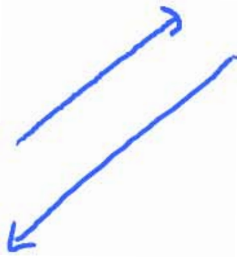
Darstellung: $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$



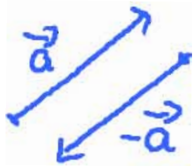
$\overrightarrow{AB}$



parallele Vektoren



antiparallele Vektoren

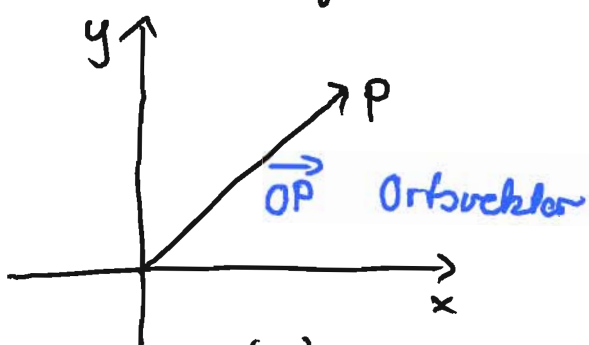


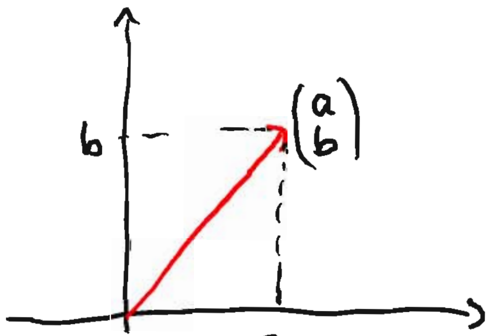
inverser Vektor

Nullvektor : $\vec{0}$ hat die Länge 0

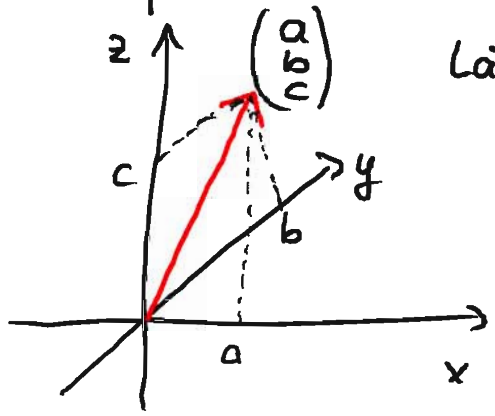
Einheitsvektor : $\vec{e}$ hat die Länge 1

Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$: hat seinen Ursprung im Ursprung eines kart. Koord.systems





Dimension: 2

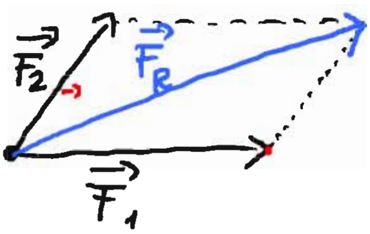


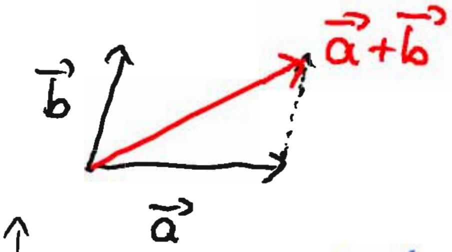
Dimension: 3

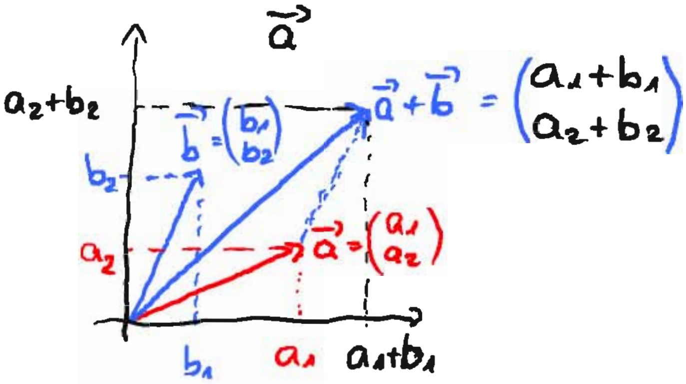
Länge $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

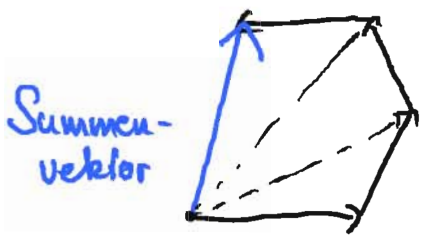
aus der Physik:



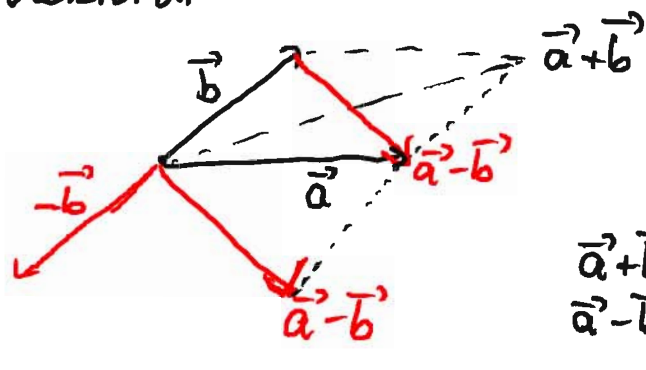




Vektorpolygon:



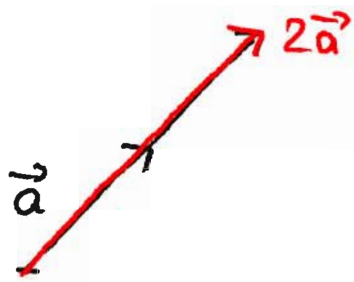
Subtraktion von Vektoren



$\left.\begin{array}{l}\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{a}-\vec{b}\end{array}\right\}$ sind die Diagonalen des "Vektorparallelogramms"

Multiplikation mit einem Skalar

$\lambda\vec{a}$ $\qquad$ $\lambda\in\mathbb{R}$



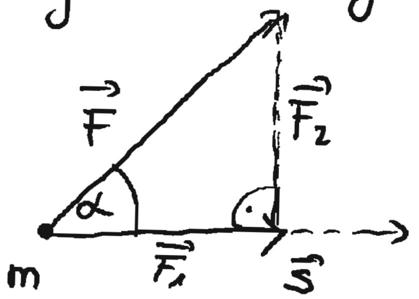
doppelt so lang, Richtung bleibt

$2\vec{a}$

$\vec{b} = \lambda \vec{a}$ $\qquad |\vec{b}| = |\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Skalarprodukt

Herleitung aus der Physik:



$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$W = |\vec{F_1}| \cdot |\vec{s}|$

Arbeit

$\cos\alpha = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{F}|}$ Ankathete / Hypotenuse

$|\vec{F_1}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$W = |\vec{s}| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$

Def: Skalarprodukt

$\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\qquad \varphi = \sphericalangle \vec{a}, \vec{b} \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{c = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\varphi} \qquad c \in \mathbb{R}$

$c = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Achtung: Das Skalarprodukt "verlässt" den Vektorraum! c ist eine reelle Zahl, ein Skalar!

Zu Hause überlegen: Gilt das Distributivgesetz?

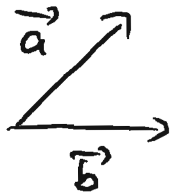
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \quad ?$$

Weiterhin gilt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Bp: Geg. $\vec{a}$ mit $|\vec{a}| = 4$

$\vec{b}$ mit $|\vec{b}| = 5$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 15$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \qquad \alpha = \sphericalangle\, \vec{a},\vec{b}$$

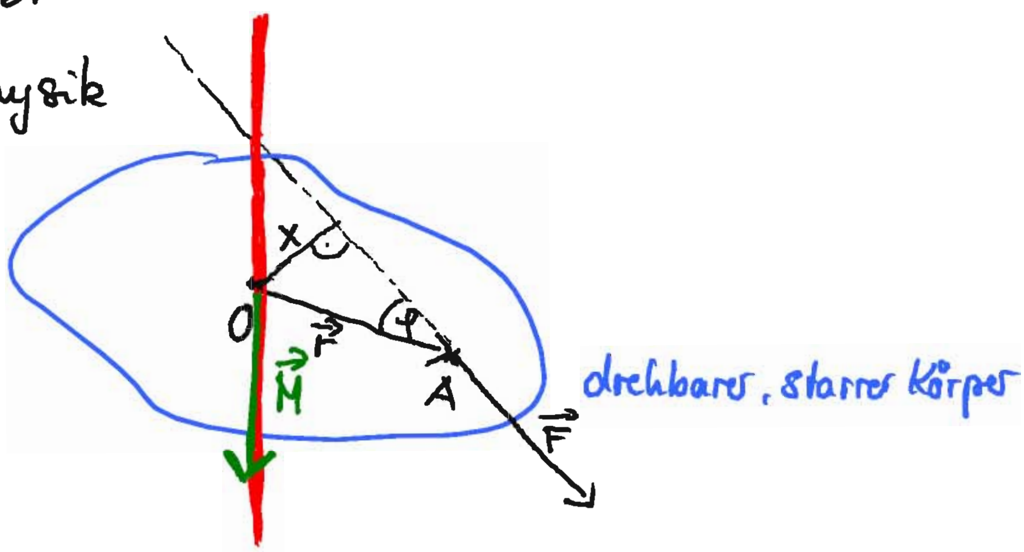
α gesucht

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{15}{4\cdot 5} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\tfrac{3}{4}\right) = 41{,}4^\circ$$

Vektorprodukt

Bp aus der Physik



Drehmoment: Kraft × Hebelarm

$$|\vec{M}| = |\vec{F}|\cdot x = |\vec{F}|\cdot|\vec{r}|\cdot\sin\varphi$$

Vektorprodukt

$\vec{a},\vec{b}$ Vektoren, nicht Nullvektor, nicht parallel

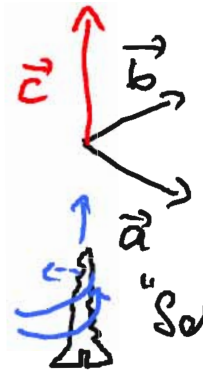
$$\sphericalangle\, \vec{a},\vec{b} = \varphi \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

Das Vektorprodukt liefert einen Vektor $\vec{c}$ mit:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

2) $\vec{c}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein "Rechtssystem"



"Schraubeneindrehrichtung"

$\vec{a} \times \vec{b}$ Vektorprodukt
Kreuzprodukt

Eigenschaften: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Assoziativgesetz gilt <u>nicht</u>!

Bp: Es sei $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \not\perp \vec{b}$

Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = 1 \iff \frac{|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\varphi}{|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\varphi} = 1$$

$$\iff \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 1 \iff \tan\varphi = 1$$

$$\Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Vektorrechnung in der Koordinatendarstellung

geg: $\vec{a}, \vec{b}$

$$\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} \quad | \cdot 3$$
$$3\vec{b} = 2\vec{a} \quad | -2\vec{a}$$
$$3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$$

Der Nullvektor kann "nicht trivial" kombiniert werden: $\vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig!

Def: Linearkombination

$\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n$

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n \quad (\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R})$$

$\vec{a}$ ist eine Linearkombination von $\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n$

Def: Lineare Abhängigkeit von Vektoren

$\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n$ heißen $\boxed{\text{linear abhängig}}$

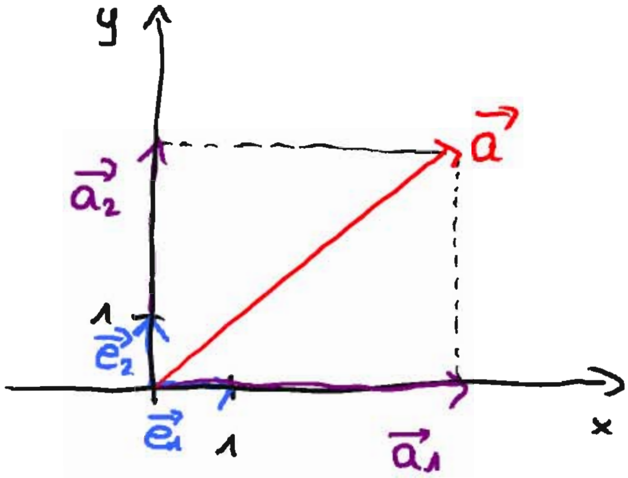
$\Leftrightarrow$ es ex. $\lambda_1 \dots \lambda_n$, $\boxed{\text{nicht alle gleich Null}}$

mit $\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots \lambda_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i = \vec{0}$ (*)

Gilt (*) nur für $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0}$,

dann sind $\boxed{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \text{ linear unabhängig}}$

Def: Koordinaten eines Vektors



$$\vec{a_1} = |\vec{a_1}| \cdot \vec{e_1}$$
$$\vec{a_2} = |\vec{a_2}| \cdot \vec{e_2}$$
$$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$$
$$\vec{a} = |\vec{a_1}| \cdot \vec{e_1} + |\vec{a_2}| \cdot \vec{e_2}$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a_1}| \\ |\vec{a_2}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$$

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beh: $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ sind linear unabhängig!

$$\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \mathrm{I} & \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \\ \mathrm{II} & \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \end{array}$$

Aus I: $\lambda_1 = 0$ Aus II $\lambda_2 = 0$

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$