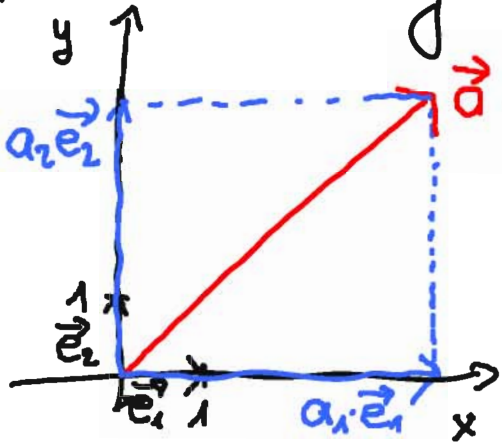
Mathe-Vorlesung 10.1.18

Ich wünsche ein gesundes und glückliches neues Jahr!

Mitteilungen:
- Evaluation heute 10-20 Uhr
- Probeklausur demnächst online
  zählt als 1 Abnahmetermin für das Praktikum!

Koordinatendarstellung von Vektoren (im $\mathbb{R}^2$)



$\vec{a} = a_1\cdot\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ Einheitsvektoren

$\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ sind linear unabhängig, da

$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ geht nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

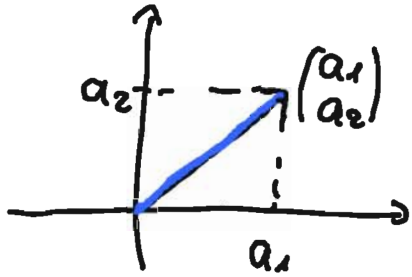
$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$

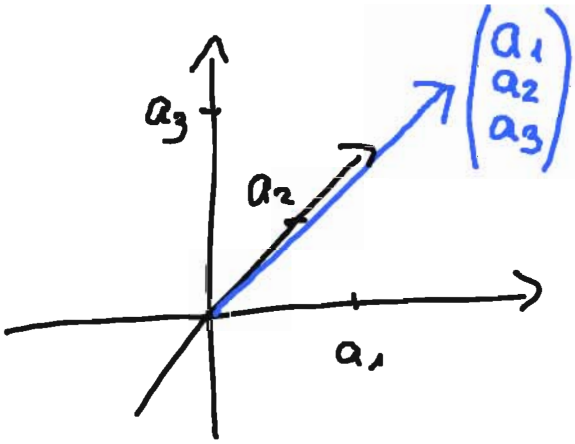
Zunächst: Vektorraum

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



a_1, a_2 Koordinaten bzgl. Basis $\vec{e_1}, \vec{e_2}$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$



Basis $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ n-dimensionalen Vektor

Vektoroperationen in Koordinatendarstellung im $\mathbb{R}^n$

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

2) Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

Bp: $\vec{p} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$ doppelte Menge: $2\vec{p} = \begin{pmatrix} 2m_1 \\ \vdots \\ 2m_n \end{pmatrix}$

Vektorraum V

V ist Vektorraum:

(1) $\vec{a}, \vec{b} \in V \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \in V$

(2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ kommutativ

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ assoziativ

(4) Es ex. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ Nullvektor

(5) Es ex. $\vec{a} + \overline{\vec{a}} = \vec{0}$ $\quad \overline{\vec{a}} = -\vec{a}$ inverser Vektor

(6) Multiplikation mit einem Skalar

$\lambda \vec{a} \in V \qquad \lambda \in R$

(7) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ distributiv

(8) $(\lambda \cdot \mu)\vec{a} = \lambda (\mu \cdot \vec{a})$

(9) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Dimension des Vektorraums R^n

$$\dim V = n$$

in Worten: es sind n lin. unabh. Vektoren nötig, um daraus alle andern lin. kombinieren zu können diese Menge v. Vektoren heißt BASIS

Bp: Geg. $\mathbb{R}^2$ $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

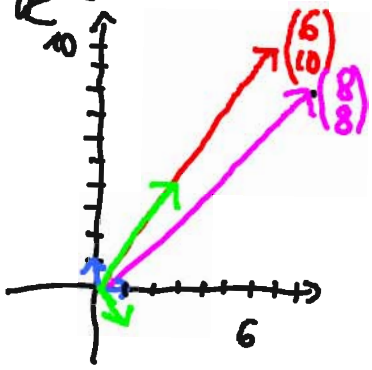
Frage: Bilden $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Basis?

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ immer der Ansatz

$$\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -3\lambda \quad *$$
$$5\lambda - \mu = 0 \overset{*}{\Rightarrow} 5\lambda + 3\lambda = 0$$
$$\Rightarrow 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$
$$\overset{*}{\Rightarrow} \mu = -3 \cdot 0 = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$



$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$6 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 6 - 3\lambda_1$$
$$10 = 5\lambda_1 - \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 5\lambda_1 - 10 \Big] =$$

$$6 - 3\lambda_1 = 5\lambda_1 - 10$$
$$16 = 8\lambda_1 \quad |:8$$
$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 6 - 3 \cdot 2 = 0$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ hat mit der neuen Basis die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

neues Beispiel: $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 8 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 8 - 3\lambda_1 \\ 8 = 5\lambda_1 - \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 5\lambda_1 - 8 \end{array}\right] =$$

$$8 - 3\lambda_1 = 5\lambda_1 - 8 \quad | +3\lambda_1 + 8$$
$$16 = 8\lambda_1 \quad | :8$$
$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 8 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ hat mit der neuen Basis die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bp: Ist $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \lambda_3 \vec{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 \quad *$$
$$-\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2 \quad **$$
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

mit * und ** $\quad 2\lambda_3 + 3\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda_3 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

also: linear unabhängig

$$\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 0 = \lambda_1 - \lambda_3 & \Rightarrow & \lambda_1 = \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_3 & \Rightarrow & \lambda_2 = \lambda_3 \end{array}\right\} \underset{*}{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3}$$

$$7 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3$$

mit $*$: $7 = 2\lambda_1 + 3\lambda_1 + \lambda_1$

$$7 = 6\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{7}{6} = \lambda_2 = \lambda_3$$

Die Koordinaten von $\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}$ bzgl. der neuen Basis lauten $\begin{pmatrix}7/6\\7/6\\7/6\end{pmatrix}$

Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Stelle: } 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^n$: $\qquad \vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Es gilt: $|\vec{e}_i| = 1 \qquad i = 1, \ldots n$

Das Skalarprodukt für n-dimensionale Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 9 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 4 = 100$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} =$ geht nicht!

Bem: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dann heißen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal

Bp. für eine Klausuraufgabe:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ a \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3a \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Achtung: Zahlen hier willkürlich gewählt!

Aufgabe: Bestimmen Sie a so, dass $\vec{a}, \vec{b}$ orthogonal

Lösung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Weggelassen im WS 2017/18 : Geraden- und Ebenengleichungen mit Vektoren

Winkel zwischen Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3 \\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \end{aligned}\right] =$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

Matrizenrechnung

Matrix : Zahlenfeld, Tabelle

Def.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \boxed{a_{ik}} & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ik} steht in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte

$m \times n$ Matrix

$m \times n$ heißt die Dimension

m: Anzahl der Zeilen

n: Anzahl der Spalten

Zeile zuerst Spalte später

a_{ik} $\quad i = 1, \ldots, m$ $\quad$ Elemente der Matrix
$\quad k = 1, \ldots, n$

i : Zeilenindex
k : Spaltenindex

Der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ ist eine Matrix der Dimension $m \times 1$

Der Zeilenvektor $(a_{11} \ a_{12} \ \ldots \ a_{1n})$ hat die Dimension $1 \times n$

Spezielle Matrizen

quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad m = n$$

Hauptdiagonale

$m \times m$ - Matrix

Vgl: Hauptdiagonalen nicht quadratischer Matrizen

$m < n$ $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & & \vdots \\ \cdots & & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad m > n$ entsprechend

Diagonalmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

A ist quadratisch

Die Koeff. außerhalb der Hauptdiagonalen sind alle Null.

Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2x2

Die Transponierte einer Matrix

A sei $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

„Zeilen werden zu Spalten"

$$(A')' = A$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 7 & 8 & 6 \\ 1/2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/2 & 0 \\ 5 & 8 & 5 & 1 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4x3 $\qquad$ 3x4

Symmetrische Matrizen

A heißt symmetrisch $\Leftrightarrow A = A'$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 10 \\ 6 & 1 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen

Dreiecksmatrizen

Sind quadratische Matrizen mit Koeff. oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null

Bp: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ untere Dreiecksmatrix

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

Vorschau: Matrizenoperationen
Rechnen mit Matrizen