

Mathematik - Vorlesung

17.1.2018

Zur Information:

A sei eine $m \times n$ -Matrix
dann ist A' (Transponierte von A) ist eine $(n \times m)$ Matrix

Def: Untermatrix

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -4 & 8 \\ 13 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 7 & 16 & 21 & 9 & 11 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
 4×5

$M = \{1, 2, 3, 4\}$ Zeilenindizes

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Spaltenindizes

$$I = \{2, 4\}$$

$$J = \{1, 5\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist eine Untermatrix von } A$$

Spezielle Untermatrizen:

Treppenschufenmatrix: $\begin{pmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \square \end{pmatrix}$

Blockbandmatrix: $\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & C \end{pmatrix}$

Matrizenoperationen: "Rechnen" mit Matrizen

1) Addition von Matrizen

A und B seien zwei $(m \times n)$ -Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

Bp:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 10 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 4} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

2) Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda A = D \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} d_{ij} = \lambda a_{ij} \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Bp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 7 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 10 & 6 & 22 \\ 1 & 10 & 22 \end{pmatrix}$$

Rechengesetze:

A, B, C ($m \times n$)-Matrizen

1) $A + B = B + A$ Kommutativgesetz

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ Assoziativgesetz $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$$

3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ Distributivgesetz

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

4) $A + 0 = A$

0 Nullmatrix

Neutralelement der Addition

5) Zu jeder Matrix A ex. eine Matrix D mit

$$A + D = 0$$

$$D = -A$$

Inverse bzgl. der Addition

$$6) (A \pm B)' = A' \pm B'$$

Matrizenmultiplikation

Erinnerung: Skalarprodukt bei Vektoren

im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \quad \varphi = \angle \vec{a}, \vec{b} \quad \text{Bp:} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 74$$

Bp. 3 Autofirmen A, B, C produzieren Kleinwagen (K),
Mittelklassewagen (M),
Oberklassewagen (O)

$$\begin{matrix} & K & M & O \\ A & \begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 500 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 1500 & 1000 & 600 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 700 & 1200 & 800 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

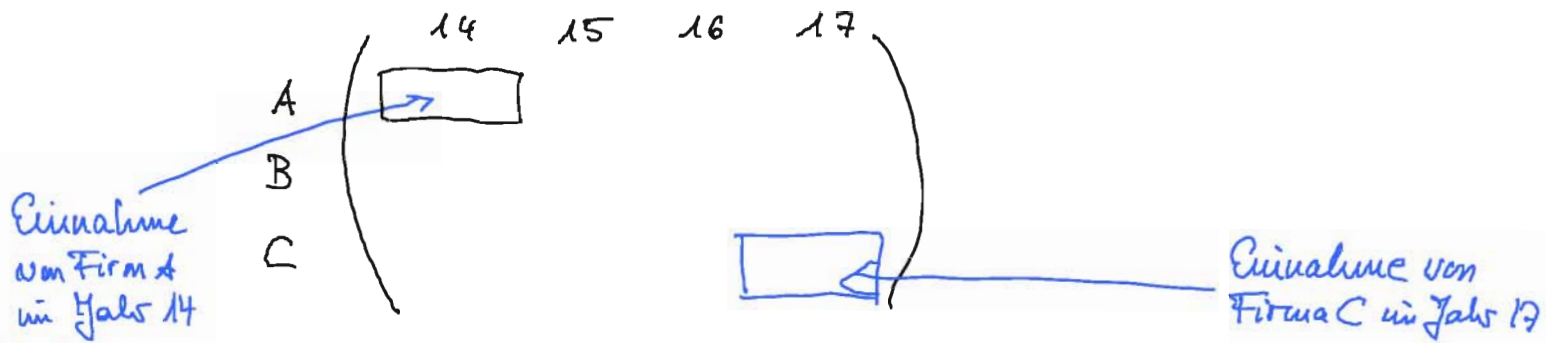
3x3-Matrix

Einnahmen pro Kleinwagen, pro Mittelklassewagen und pro Oberklassewagen
in den Jahren 14 15 16 17

$$\begin{matrix} & 14 & 15 & 16 & 17 \\ K & \begin{pmatrix} 9900 & 10000 & 10500 & 11000 \end{pmatrix} \\ M & \begin{pmatrix} 19000 & 19500 & 20000 & 21000 \end{pmatrix} \\ O & \begin{pmatrix} 30000 & 31000 & 31500 & 33000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

3x4-Matrix

Gesucht ist eine Tabelle, in der die Einnahmen der drei Firmen A, B, C in den Jahren 14-17 für ihre produzierten Autos aufgelistet sind.



Rechenweg:
Skalarprodukt
aus 1. Zeile $\times$ 1. Spalte
1. Matrix 2. Matrix

$$1. \text{ Zeile} \times 1. \text{ Spalte} : 1000 \cdot 9900 + 1500 \cdot 19000 + 500 \cdot 30000 = 53,4 \text{ Mio}$$

$$= C_{11} \text{ in der Ergebnismatrix}$$

Gesamteinnahmen der Firma A im Jahr 14

$$1. \text{ Zeile} \times 2. \text{ Spalte} : 1000 \cdot 10000 + 1500 \cdot 19500 + 500 \cdot 31000 = 54,75 \text{ Mio}$$

$$= C_{12} \text{ in der Ergebnismatrix}$$

etc.

	14	15	16	17
A	53,4	54,75	56,25	59
B	51,85	53,1	54,65	57,3
C	57,53	59,1	60,55	63,5

2. Zeile $\times$ 4. Spalte

Merke: Multiplikation von Matrizen nur dann möglich, wenn die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmt

Regel : 3×3 - Matrix $\quad 3 \times 4$ Matrix

Bp:

A	B	C
5×5	5×6	5×6
$\underbrace{\hspace{10em}}_{=}$		
3×4	3×4	$\textcolor{red}{\neq}$
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\neq}$		
2×20	20×1	2×1
$\underbrace{\hspace{10em}}_{=}$		
1×50	50×1	1×1
$\underbrace{\hspace{10em}}_{=}$		

Def. Matrizenmultiplikation

$$A \cdot B = C$$

A $m \times n$ - Matrix

B $n \times l$ - Matrix

C $m \times l$ - Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = A_i \cdot B_j = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$\uparrow$ i -te Zeile
 $\uparrow$ j -te Spalte

Skalarprodukt aus
der i -ten Zeile
und der j -ten Spalte

Bp:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 7 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3×4 4×5

$$= \begin{pmatrix} \boxed{126} & \boxed{18} & \boxed{47} & \boxed{59} & \boxed{26} \\ \boxed{11} & \boxed{6} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{89} & \boxed{12} & \boxed{8} & \boxed{24} & \boxed{28} \end{pmatrix}$$

3×5

Rechenregeln und Eigenschaften

- 1) $A \cdot B \neq B \cdot A$ Kommutativgesetz gilt nicht
- 2) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ Assoziativgesetz gilt!
(zu Hause überlegen!!)
- 3) $A \cdot E = A = E \cdot A$
- 4) $A(B+C) = AB + AC$ Distributivgesetz
 $(A+B)C = A \cdot C + BC$
- 5) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

Besonderheiten

$A^2 = A$ gilt auch, falls $A \neq E$ oder $A \neq 0$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D^2 = E$ obwohl $D \neq E$ und $D \neq -E$

Bsp. soll auf Blatt 5 gesucht werden.

Die Inverse einer Matrix

Def: A quadratisch

B heißt Inverse von $A \Leftrightarrow B \cdot A = A \cdot B = E$

$$B = A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Berechnen der Inversen von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} x_{11} + a_{12} x_{21} = 1$$

$$a_{11} x_{12} + a_{12} x_{22} = 0$$

$$a_{21} x_{11} + a_{22} x_{21} = 0$$

$$a_{21} x_{12} + a_{22} x_{22} = 1$$

Unbekannte sind

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Umformungen
✓

$$(a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}) \cdot x_{11} = a_{22}$$

$$(a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}) \cdot x_{21} = -a_{21}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{''} \end{array} \right) \cdot x_{12} = -a_{12}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{''} \end{array} \right) \cdot x_{22} = a_{11}$$

$$D = a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}$$

$$\text{Somit } A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\text{Rechenregeln } (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ökonomische Anwendung von Matrizen

1. Bp:

	Stahl	Holz	Glas	Arbeitsstunden
Alb	5	6	4	17
Phön	7	8	5	21
Tannus	6	7	7	15

$$=: M$$

Materialbedarfsmatrix

3x4

Auftrag: $A := \begin{pmatrix} \text{Alb} & \text{Rhön} & \text{Taunus} \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

1×3

Materialbedarf für Auftrag:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{AE} \\ 139 & 162 & 134 & 391 \end{pmatrix}$$

$1 \times 3 \quad 3 \times 4$

$$(5 \ 6 \ 12) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Sei $P := \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$ Stahl
Holz
Glas
Arbeit

Prävektor

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692 \\ 885 \\ 696 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Alb} \\ \text{Rhön} \\ \text{Taunus} \end{matrix}$$

$3 \times 4 \quad 4 \times 1$ 4×1 3×1

Herstellungskosten für je 1 Haus

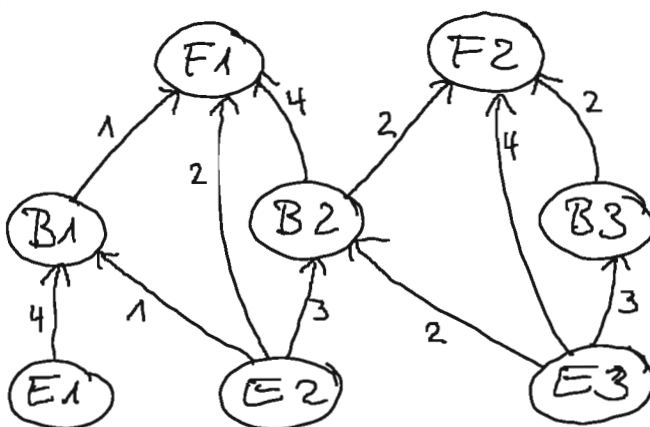
Herstellungskosten für den Auftrag:

$$A \cdot (M \cdot P) = (A \cdot M) \cdot P = \begin{pmatrix} 139 & 162 & 134 & 391 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$1 \times 4 \quad 4 \times 1$

$$= 17122$$

Graphen und Matrizen



Fertigungsprodukte

Baugruppen

Einzelteile

Gozintograph

(entstanden aus: the part that goes into)

	E1	E2	E3	B1	B2	B3	F1	F2
E1	0	0	0	4	0	0	0	0
E2	0	0	0	1	3	0	2	0
E3	0	0	0	0	2	3	0	4
B1	0	0	0	0	0	0	1	0
B2	0	0	0	0	0	0	4	2
B3	0	0	0	0	0	0	0	2
F1	0	0	0	0	0	0	0	0
F2	0	0	0	0	0	0	0	0

Teilebedarfsmatrix

	F1	F2
F1	1	0
F2	0	1
B1	1	0
B2	4	2
B3	0	2
E1	4	0
E2	15	6
E3	8	14

$$Z = \begin{matrix} & \begin{matrix} F1 & F2 & B1 & B2 & B3 & E1 & E2 & E3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & 0.1 & & & 0.2 & 0.5 & \\ & & & 0.2 & & & 0.4 & 0.6 \\ & & & & 0.2 & 0.6 & & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & & & 0.3 & \\ & 0.7 & 0.1 & 0.5 & & & & 0.1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Zeitbedarfsmatrix

Belegung durch $A = Z \cdot T$