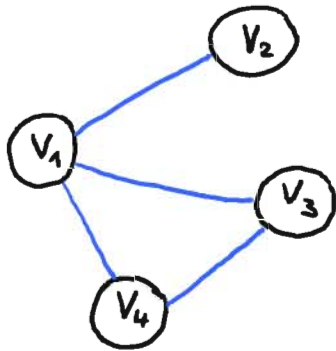


Vorlesung Mathematik 24.1.2018

Netzwerkmatrizen



Graph mit Knoten $v_1, \dots, v_4$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Symmetrisch

Adjazenzmatrix

Graph $\longrightarrow$ Matrix

$\longrightarrow$ SS 18 : Graphentheorie

Ausblick: Beziehungen zwischen Matrizen und Vektorräumen

Frage: Kann eine Matrix so umgeformt werden, dass die Zeilen bzw. Spalten eine Basis des Vektorraums repräsentiert?
($\rightarrow$ Rang einer Matrix)

Hinweis: Lineare Abbildungen und Matrizen

A sei eine $(m \times n)$ -Matrix

$\vec{x}$ sei ein n -dimensionaler Vektor

$$y = A \cdot \vec{x}$$

$$y = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$m \times n$ $n \times 1$ $m \times 1$

durch A wird
eine Abb. vorgegeben

aus einem n -dimensionalen Vektor wird durch $y = A \cdot \vec{x}$ ein
 m -dim. Vektor!

Rang einer Matrix

Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten einer Matrix A heißt Rang: $\text{rg}(A)$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot 2 \quad \text{rg}(A) = 1$

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} - I$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rangbestimmung einer Matrix (Herausfinden der Maximalzahl an Zeilen
(geht auch für Spalten))

Elementare Umformungen:

- Multiplikation der i -ten Zeile mit einem Skalar
- Addition der j -ten Zeile zur i -ten Zeile
- Addition der λ -fachen j -ten Zeile zur i -ten Zeile
- Vertauschen von Zeilen

Jede $(m \times n)$ -Matrix kann durch endlich viele elementare Umformungen in eine Zeilenstufenform gebracht werden

$$A \xrightarrow{\text{elementare Umf.}} \dots \rightarrow \dots \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & 1 & b_{23} & \dots \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

1) Bp: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix}$

Gesucht $\text{rg}(A)$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

zu 1) $\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 4 & 10 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +1. \text{ Zeile} \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 18 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} : (-14) \\ : 4 \\ : 4 \end{matrix}$$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösungen 2) und 3):

2) $\text{rg}(A) = 2$

3) $\text{rg}(A) = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \quad -19 \times 2. \text{ Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{93}{2} \end{pmatrix} \quad \cdot -\frac{2}{93}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A) = 3$

Lineare Gleichungssysteme

Bp: Historische Aufgabe

Ansatz: Barschaft des 1. Reisenden : X

" " 2. " : Y

" " 3. " : Z

X, Y, Z sind die gesuchten Variablen

$$73 + X + Y = 2(X + Z + Y + Z)$$

$$73 + X + Z = 3(Y + Z + X + Y)$$

$$73 + Y + Z = 4(X + Y + X + Z)$$

Lineares GS

$$73 = X + 4Z + Y$$

$$73 = 6Y + 2Z + 2X$$

$$73 = 8X + 3Y + 3Z$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} X + Y + 4Z = 73 \\ 2X + 6Y + 2Z = 73 \\ 8X + 3Y + 3Z = 73 \end{matrix}$$

$$2X + 6Y + 2Z = 73$$

$$8X + 3Y + 3Z = 73$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 8 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 73 \\ 73 \end{pmatrix}$$

Für den Start des Lösungsverganges:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{array} \right)$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

nun: Gauß'sche Lösungsverfahren

Augmentin:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gesucht sind die zugehörigen Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 12 \\ -x_1 & & + 4x_3 = 8 \end{array}$$

Bemerkungen zu Lin. GS: (m Gleichungen, n Variablen)

- exakt bestimmt $m=n$
 - überbestimmt $m>n$
 - unterbestimmt $m<n$
- Freiheitsgrade $n-1$ bei nur 1 Gleichung

Äquivalente QS besitzen dieselbe Lösungsmenge

Äquivalente Umformungen sind:

Vertauschen der Gleichungen (Zeilen vertauschen in Koeff. matrix)
 " der Variablenreihenfolge (Spalten " " " ")

Jede Gleichung darf mit einem Skalar multipliziert werden

(Zeilen mit Skalar multiplizieren)

Add. von Gleichungen zu anderen Gleichungen

(Add. des λ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile)

Grundlagen des Gauß'schen Lösungsalgorithmus

Gauß (1777-1855)

Algorithmen an einem Beispiel

Zu bestimmen x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & | & 16 \end{pmatrix}$$

Auswahl einer Pivotzeile

" " Pivotspalte

Pivotelement im Kreuzungspunkt

Ziel: "Nullen erzeugen"

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array} \right) \begin{array}{l} -1 \times 1. \text{ Zeile} \\ -3 \times 1. \text{ Zeile} \\ +2 \times 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

1. Elimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -8 & 14 \end{array} \right) : -2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -8 & 14 \end{array} \right) \begin{array}{l} +4 \times 2. \text{ Zeile} \\ -10 \times 2. \text{ Zeile} \end{array}$$

2. Elimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array} \right) -2 \times 3. \text{ Zeile}$$

3. Elimination

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 42 \end{array} \right) \begin{array}{l} : 3 \\ : 21 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$x_4 = 2$$

Aus Zeile 3: $x_3 - \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3}$

$$x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \Rightarrow x_3 = 0$$

Aus Zeile 2:

$$x_2 - 0 - \frac{5}{2} \cdot 2 = -2 \Rightarrow x_2 = -2 + 5 = 3$$

$$\text{Aus Zeile 1: } x_1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 - 6 + 6 = -1$$

Die Lösungen lauten: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$

Es gilt: Ein lin. QS ist eindeutig lösbar

$$\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) = n$$

Zum Schluß: Lösen der historischen Aufgabe

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \times \text{Zeile 1} \\ -8 \times \text{Zeile 1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 4 & -6 & -73 \\ 0 & -5 & -29 & -511 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 20 & -30 & -365 \\ 0 & -20 & -146 & -2409 \end{array} \right) + \text{Zeile 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 20 & -30 & -365 \\ 0 & 0 & -146 & -2409 \end{array} \right)$$

$$-146z = -2409 \quad | : -146$$

$$z = \frac{-2409}{-146} = 16.5$$

$$20y - 30 \cdot 16.5 = -365$$

$$20y = -365 + 495 = 130$$

$$y = \frac{130}{20} = 6.5$$

$$x + 6.5 + 4 \cdot 16.5 \Rightarrow x = 0.5$$