Vorlesung Mathematik
31.1.2018

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad \underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}$$

Lin. GS und Inverse der Koeff.matrix

Lin. GS als Matrizengleichung

Die Lösung eines exakt bestimmten GS lautet

$$x_1 = b_1^*$$
$$x_2 = b_2^*$$
$$\vdots$$
$$x_m = b_m^*$$

Die Lösung kann auch als Matrizengleichung dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$$

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

Interpretation:
Lösung eines lin. GS durch Multiplikation der Inversen der Koeff.matrix A mit $\vec{b}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\left.\begin{aligned} E\vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ E \cdot \vec{x} &= \vec{b}^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{b}^*}$$

Hieraus abzuleiten ist eine Möglichkeit, die Inverse einer Matrix zu berechn

Man löst $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j$ für $j = 1, \ldots, m$ $\quad$ $\vec{e}_j$ ist die j-te Spalte von E

Formal geht man so vor:

$$\begin{array}{ccc} A & & E \\ \vdots & & \vdots \\ E & & A^{-1} \end{array}$$

Umwandlung durch äquiv. Umformungen

werden genau auch an E durchgeführt

Bp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} -2\times I \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -2\times I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\times II' \\ :2\ (II') \\ +3\times II' \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$0 \quad 1 \quad 1/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -III \\ \cdot 2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Determinanten

Inverse einer (2x2)-Matrix $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Man bildet aus allen Koeffizienten eine einzige Zahl

"Kennzahl" für Matrizen

$$D = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinante einer (3×3)-Matrix

$A = (a_{11}) \quad \det A = a_{11}$ 1 Summand

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A =$ 2 Summanden

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

6 Summanden $= 3!$ Summanden

Nur für 3-reihige Determinanten gilt die Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Permutation : Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen

Das sind : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Allg. Def. : Determinante einer $(m \times m)$-Matrix

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{mj_m}$$

$P(j)$: Permutationen des zweiten Index

$I(j)$: Anzahl der Inversionen (Vertauschen von jeweils 2 Indizes)

Frage: Wie viele Summanden benötigt man, um eine 4reihige Determinante zu berechnen, wie viele bei einer 6-reihigen?

Antwort: 4-reihig : $4! = 24$ Summanden

6-reihig : $6! = 720$ Summanden

Orginal-Definition ist unhandlich, daher benötigt man Regeln zur einfacheren Berechnung von Determinanten!

Berechnen Sie:

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 7 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 5\cdot 8 + 0 + 3\cdot(-2)\cdot 6 - 3\cdot 5\cdot 3 - 6\cdot 7 - 0$$
$$= 40 - 36 - 45 - 42$$
$$= -83$$

3) $$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 3 & c \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \\ 1 & b & c & 1 & b \\ 0 & 3 & c & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}$$

$$= 1\cdot 3\cdot 4 + b\cdot c\cdot 2 + 0 - c\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot c\cdot 3 - b\cdot 0\cdot 4$$
$$= 12 + 2bc - 6c - 3c$$
$$= 12 - 9c + 2bc$$

Einfachere Regeln – Grundlegende Begriffe

Zur Erinnerung: Begriff: Untermatrix

Ebenso: Unterdeterminanten

Def: Unterdeterminante $(m-1)$-ter Ordnung $|A|_{ij}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \Rightarrow |A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{i-11} & & \ddots & & & & \\ a_{i+11} & & & \ddots & & & a_{i-1m} \\ & & & & \ddots & & a_{i+1m} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & & & & a_{mm} \end{vmatrix}$$

MINOR

(es fehlt die i-te Zeile und die j-te Spalte)

Bp: $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

9 Minoren

(2-reihige Unterdeterminanten)

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |A|_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad |A|_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A|_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad |A|_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad |A|_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A|_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6 \quad |A|_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \quad |A|_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 18$$

Def: Adjunkte einer Determinante

Zu beachten ist folgendes "Vorzeichenmuster"

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & & & \\ + & & \ddots & & \\ - & & & & \\ + & & & & \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A|_{ij}$$

Die Zahlen werden zu einer Matrix zusammengefasst, die Transponierte dieser Matrix heißt die Adjungierte zur Matrix A : A_{ad}

Aus obigem Bp: $A_{ad} = \begin{pmatrix} 2 & +1 & -6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 18 \end{pmatrix}$

Der Entwicklungssatz von Laplace

Entwicklung nach einer Zeile oder nach einer Spalte

Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A|_{ij}$$

Spalte:

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A|_{ij}$$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Entwicklung nach 1. Zeile

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 + 0 = 12$$

Entwickeln nach 3. Spalte:

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 4 + 8 = 12$$

Bsp:
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^{+} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. 4. Zeile}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Entw. 1. Zeile}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$ 3. Spalte $\qquad$ $\Downarrow$ 3. Zeile

$$(-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

$$-1 \quad - \quad (-1)$$

$$= 0$$

Weitere Erleichterung:

Vor dem Entw.satz von Laplace erst geschickt umformen:

Bsp:
$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -1.\text{ Zeile} \\ -1.\text{ Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$ Weitere Umformungen
(z.B. 3x Spalten vertauschen)

$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9/2 = -36$$

Integralrechnung

Stammfunktion $\Rightarrow$ Unbestimmtes Integral

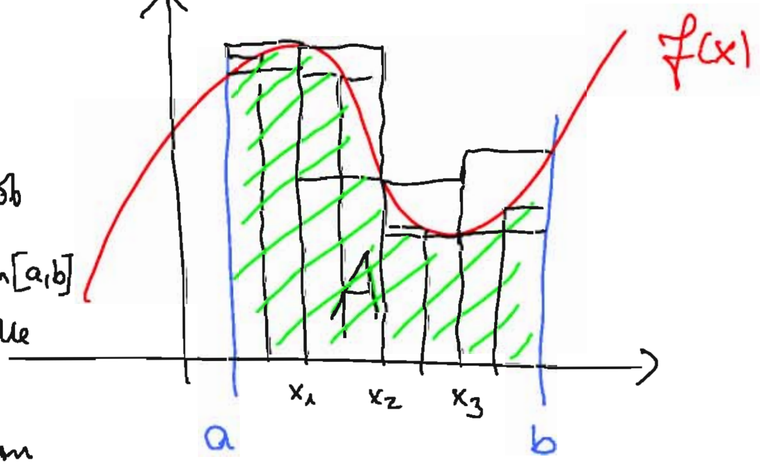
Fläche, Oberfläche, Volumen berechnen $\Rightarrow$ Bestimmte Integral

Zur Erinnerung: $f(x) \xrightarrow{\text{differenziert}} f'(x)$

Ableitung

Stammfkt.

Das bestimmte Integral



Herleitung grob

Einteilung von $[a,b]$ in Teilintervalle

$\Downarrow$

Verfeinern