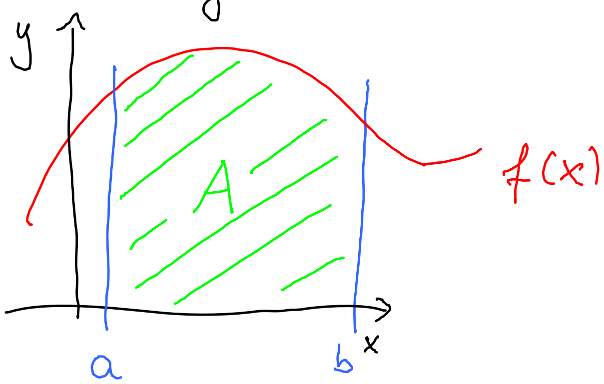
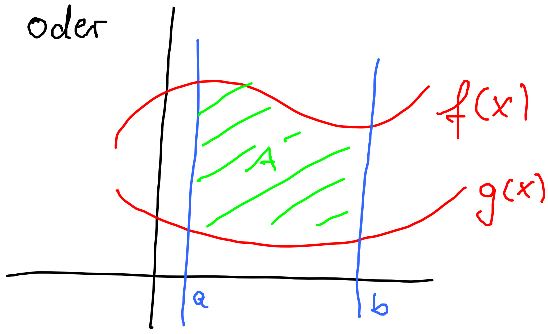
Mathematik-Vorlesung
7.2.2018
"die letzte im WS 2017/18"

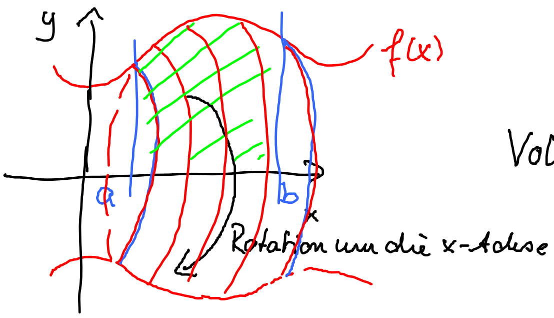
Integralrechnung



oder



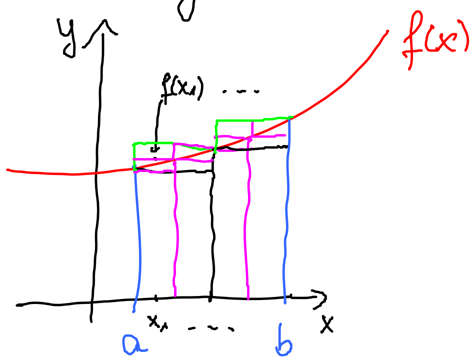
oder



Volumen des Rotationskörpers

=> ... führt auf den Begriff des bestimmten Integrals

Das bestimmte Integral



⟶ zunehmende Verfeinerung des Intervalls [a, b]

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

Höhe des "feinen" Rechtecks

Breite des "feinen" Rechtecks

$$\Downarrow$$

obere → b

Integrationsgrenze $\int_a^b f(x) \cdot dx$

untere → a

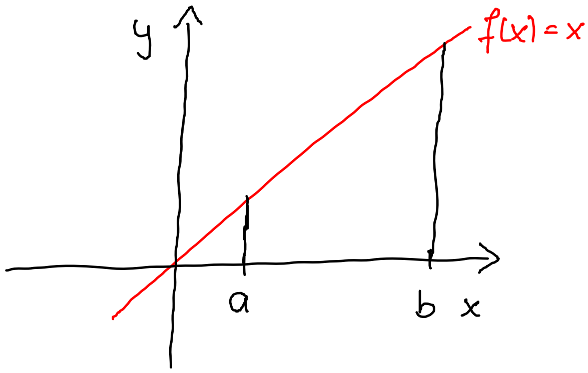
x Integrationsvariable

Integrand

Differential

Bp: $f(x) = x$

Gesucht: $\int_a^b f(x)\,dx$



Wähle $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$

$[a,b]$ wird in n äquidistante Teile Δx zerlegt, die Zerlegungspunkte

sind $x_k = a + k \cdot \Delta x \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n$

Wir wählen hier die Untersumme für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x\right)$$

$$\Big\downarrow f(x) = x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[a + (k-1)\cdot \Delta x\right]}_{x_{k-1}} \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x + (k-1) \cdot \Delta x^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x + \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot \Delta x^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)\right)$$

$$\downarrow$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k}_{\frac{n(n-1)}{2}} \right)$$

(Summe der ersten $n-1$ natürlichen Zahl)

$$= \lim_{n\to\infty} \Delta x \left(n \cdot a + \Delta x \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{\cancel{n}} \left(\cancel{n} \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{(n-1)}{n} \right)$$

→ für $n \to \infty$ geht $\frac{n-1}{n}$ gegen 1

$$= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right)$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Also $$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

[In der Schule wären Sie so vorgegangen:

$y = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$

$\left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$]

Das unbestimmte Integral

Gesucht: $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$$

Es gilt $(F(x) + C)' = f(x)$

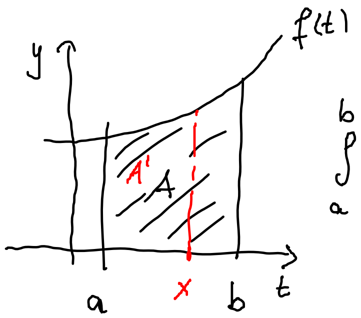
Die gesuchte Funktion ist unbestimmt, bis auf Konstanten aber eindeutig!

$$\int f(x)\,dx = F(X) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

hier Integration: das Aufsuchen eines Stammfunktion

das bestimmte Integral $\longleftrightarrow$ das unbestimmte Integral

Zusammenhang: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad A' = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$I : x \longmapsto I(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{mit } x \in [a,b]$$

$$I_1 : x \longrightarrow \int_{c_1}^x f(t)\,dt$$

$$I_2 : x \longrightarrow \int_{c_2}^x f(t)\,dt \quad \text{mit } x, c_1, c_2 \in [a,b]$$

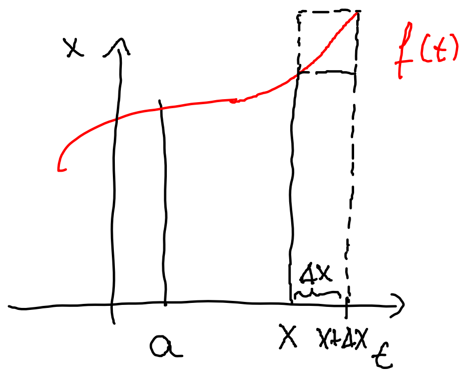
$$I_1 - I_2 = \int_{c_1}^x f(t)\,dt - \int_{c_2}^x f(t)\,dt$$

$$= \int_{c_1}^x f(t)\,dt + \int_x^{c_2} f(t)\,dt$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt \quad \text{konstant, da } x \text{ nicht mehr vorkommt}$$

Die Differenz zweier unbestimmter Integrale ist eine Konstante

Betrachte nun: $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$



Der Zuwachs der Fläche liegt zwischen

$$f(x)\cdot\Delta x \le \Delta I \le f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \le \frac{\Delta I}{\Delta x} \le f(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x) \le I'(x) \le f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = I'(x)$$

Aussage des Hauptsatzes der Diff.+Int.rechnung

$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion zu f

und es ist $I'(x) = f(x)$

Differenzieren und Integrieren sind inverse Rechenoperationen

Folgerung: $\int_a^b f(x)\,dx$

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

Aus $\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$

$$I(x) = F(x) - F(a)$$

Für $x=b$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

$$= \Big[F(x) \Big]_a^b$$

Das größte Problem: Aufsuchen der Stammfunktion

Aus bekannten Ableitungen herzuleiten:

Bp.: $f(x) = e^x \implies F(x) = e^x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x} \implies F(x) = \ln x + C$

$f(x) = \cos x \implies F(x) = \sin x + C$

$f(x) = \sin x \implies F(x) = -\cos x + C$

$f(x) = x^n \implies F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

Weitere Grundintegrale in allen Formelsammlungen

Geschlossen lösbare Integrale: in endlich vielen Schritten lösbar

nicht geschlossen lösbare Integrale werden "approximiert" (numerische Annäherung)

Integrationsregeln

Produktintegration oder partielle Integration

Herzuleiten aus der Produktregel der Diff.rechnung

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$f(x)\cdot g'(x) = \big(f(x)\cdot g(x)\big)' - f'(x)\cdot g(x)$$

Integration auf beiden Seiten

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int \big(f(x)\cdot g(x)\big)'\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Bp: 1) $\int x\cdot \sin x\,dx$ $\quad f(x)=x \quad f'(x)=1$
$\quad g'(x)=\sin x \quad g(x)=-\cos x$

$$= -x\cdot\cos x - \int 1\cdot -\cos x\,dx$$

$$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cdot\cos x + \sin x + C,\ C\in\mathbb{R}$$

2) $\int x^2\cdot e^x\,dx$ $\quad f(x)=x^2 \quad f'(x)=2x$
$\quad g'(x)=e^x \quad g(x)=e^x$

$$= x^2\cdot e^x - \underbrace{\int 2x\cdot e^x\,dx}$$

erneute partielle Integration

$f(x)=2x \quad f'(x)=2$
$g'(x)=e^x \quad g(x)=e^x$

$$= 2x\cdot e^x - \int 2\cdot e^x\,dx$$

$$= 2x\cdot e^x - 2\cdot e^x$$

$$= x^2\cdot e^x - \left(2x\cdot e^x - 2e^x\right) = x^2\cdot e^x - 2x\cdot e^x + 2e^x$$
$$= e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

3) $\int \sin x\cdot\cos x\,dx$ $\quad f(x)=\sin x \quad f'(x)=\cos x$
$\quad g'(x)=\cos x \quad g(x)=\sin x$

$$\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \sin x\cdot\sin x - \int \cos x\cdot\sin x\,dx \quad \Big| + \int \cos x\cdot\sin x\,dx$$

$$2\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \sin^2 x \quad \Big| :2$$

$$\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C,\ C\in\mathbb{R}$$

4) $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$ $\quad f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \quad g(x) = x$

$$= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x$$

$$= x(\ln x - 1) + C \,, \; C \in \mathbb{R} \,, \; x > 0$$

Integrationsregeln : Integration durch Substitution

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad y = f(g(x))$$

Kettenregel

Das Prinzip der Kettenregel geht in die Integration durch Substitution ein!

Bp: $\int \sqrt{x^2+2} \cdot \underbrace{2x \, dx}$ $\quad z = x^2+2 \quad z' = \frac{dz}{dx} = 2x$

$\Rightarrow \boxed{dz = 2x\,dx}$

$$\int \sqrt{z} \, dz$$

$$= \int z^{\frac{1}{2}} \, dz = \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}}$$

Rücksubstitution : $\int \sqrt{x^2+2} \, 2x \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+2)^3} + C$

$C \in \mathbb{R}$

Allgemeine Regel: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(z) \, dz$

Bp: $\int \frac{1}{2x+3} \underbrace{dx}$ $\quad z = 2x+3$

$z' = \frac{dz}{dx} = 2 \quad dz = \underbrace{2dx}$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{z} \, dz = \frac{1}{2} \ln|z| \underset{\text{Rücksubs.}}{=} \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C \,, \; C \in \mathbb{R}$$

$$\int x \cdot e^{-x^2}\, dx \qquad z = -x^2 \qquad \frac{dz}{dx} = -2x \qquad dz = -2x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{z}\, \underset{(-2x\,dx)}{dz}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{z} \underset{R.S.}{=} -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Bp. für zu Hause: $\int \tan x \, dx$ Tipp: Umschreiben in $\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

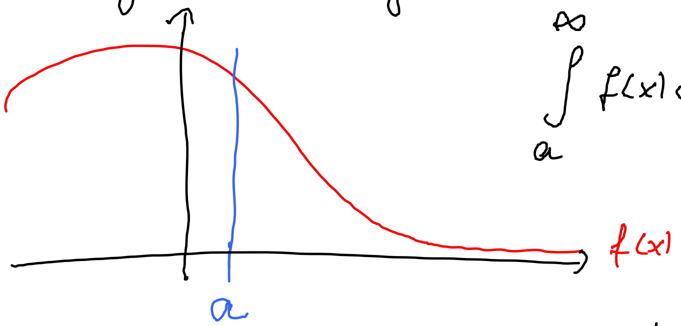
(Lösung: $-\ln|\cos x| + C$, $C \in \mathbb{R}$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

(Lösung: $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$

Uneigentliche Integrale



$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} f(x)\, dx$$

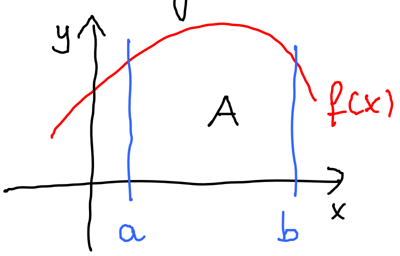
Bp: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\, dx$

$$\lim_{b_n \to \infty} \int_1^{b_n} \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{b_n \to \infty} \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^{b_n}$$

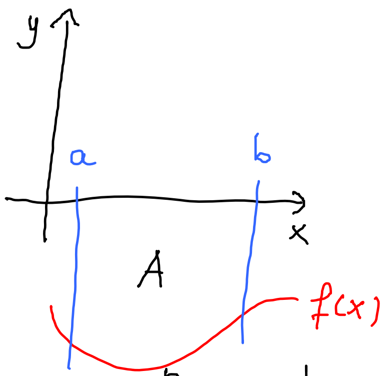
$$= \lim_{b_n \to \infty} \left[\underbrace{-\frac{1}{3b_n^3}}_{0} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

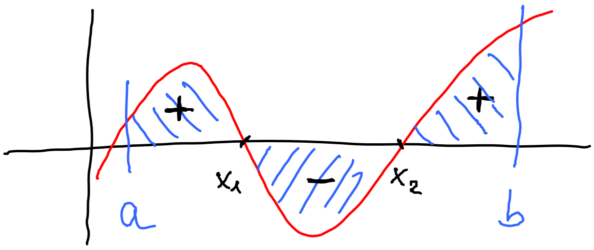
Anwendungen



$$\int_a^b f(x)\, dx = A$$

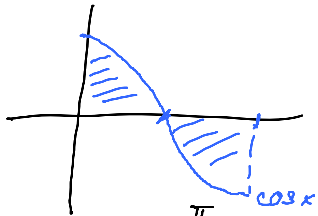


$$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = -\int_a^b f(x)\, dx$$



$$A_{ges.} = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{b} f(x)\,dx\right|$$

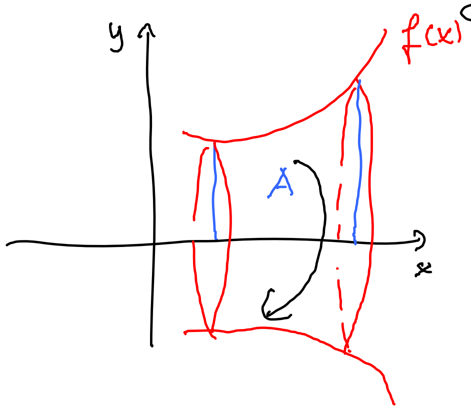
Bp: $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$



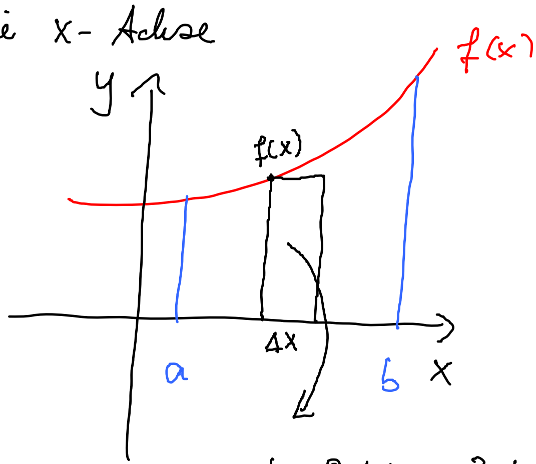
$$\left|\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx\right| + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx\right|$$

Flächen zwischen zwei Kurven (Selbststudium)

Rotationsvolumen bei Drehung um die x-Achse



Trichter



bei Rotation: Zylinderscheibe

mit $V_{Scheibe} = \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot \Delta x$

$$\downarrow$$

$$\pi \int [f(x)]^2 \, dx$$

Formel für das Rot.vol. bei Drehung um x-Achse