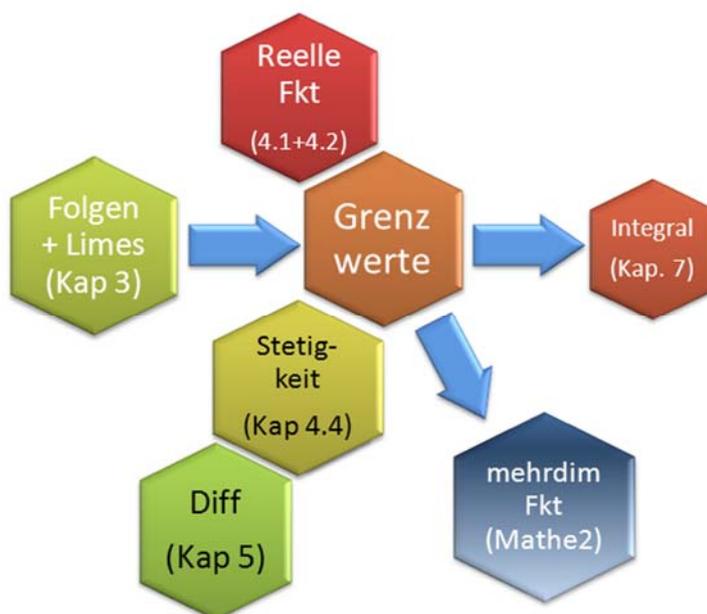


3. Zahlenfolgen

3.1. Wozu InformatikerInnen Folgen brauchen

- Konvergenz von Folgen ist die Grundlage der Analysis (Differential- und Integralrechnung)
- Transzendente Gleichungen wie $x \ln x = 50$ kann man näherungsweise über Folgen lösen (**Fixpunkt-Iteration**)
- Jede **Simulation** im Computer zerlegt die Zeit in kleine Schritte und berechnet somit Folgen $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$ >> [WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme](#).
- **Laufzeit von Algorithmen**, Worst-case-Abschätzung durch obere Abschätzung zu bekannten Folgen. Oftmals schreibt man ein Programm und kann es für kleine Mengen (z.B. $n=10$) austesten, aber in der Praxis wird es mit viel größeren Mengen (z.B. $n=1.000.000$) laufen. Wie ist das Verhalten im Grenzwert großer Zahlen? Dies führt auf Folgen und die **Landausche $O()$ -Notation**.

Einordnung:



3.2. Definition und Eigenschaften von Folgen

Wir hatten ja bereits zur Definition reeller Zahlen den Begriff der Zahlenfolge benötigt. In diesem Kapitel soll der Begriff weiter vertieft werden.

Def D3-1: Zahlenfolge

Unter einer (unendlichen) Zahlenfolge versteht man eine eindeutige Abbildung der Menge \mathbf{N} der natürlichen Zahlen auf einen Zahlenbereich. $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots$

Die Zahlen a_1, a_2, a_3, \dots heißen Glieder der Folge, a_n ist das n -te Glied.

Beispiel:

$$1.) a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad (\text{Bem.: } a_n \rightarrow 0)$$

Weitere Beispiele in Vorlesung

Def D3-2: Monotonie von Folgen

Eine Folge heißt:

monoton wachsend (\uparrow), falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$

streng monoton wachsend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n < a_{n+1}$

monoton fallend (\downarrow), falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$

streng monoton fallend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n > a_{n+1}$

Def D3-3: Beschränktheit von Folgen

Sei $n \in \mathbf{N}$. Eine Folge heißt:

nach oben beschränkt (n.o.b.), falls ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle n gilt: $a_n \leq K$

nach unten beschränkt (n.u.b.), falls ein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle n gilt: $a_n \geq L$

und

beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiele:

$$1.) a_n = \frac{n}{2^n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots$$

Die Folge ist monoton fallend und beschränkt, z.B. $L = 0$, $K = 1$.

$$2.) a_n = n, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = 1, 2, 3, 4, \dots$$

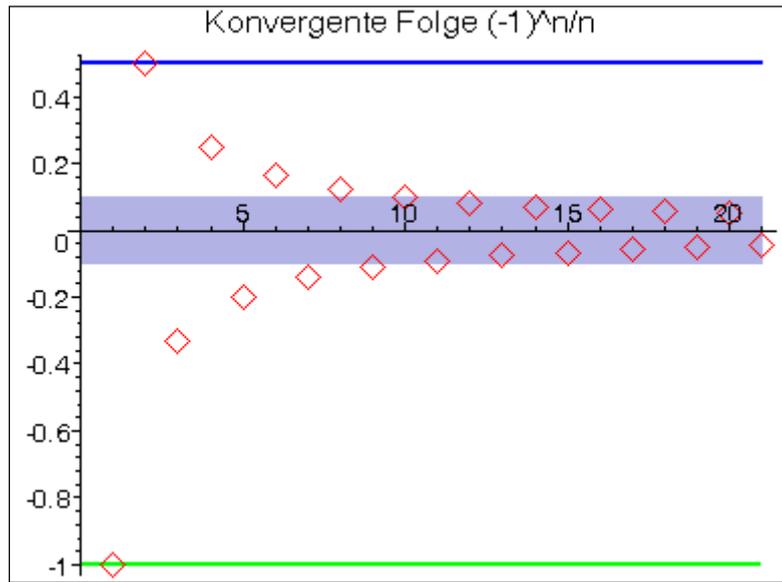
Die Folge ist streng monoton wachsend und nach unten beschränkt, z.B. $L = 0$, aber nach oben **unbeschränkt** (es existiert kein K mit $a_n \leq K \forall n$).

3.3. Grenzwert einer Zahlenfolge

Schauen wir uns ein Beispiel

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

im Graphen an:



Anschaulich: Ab einem gewissen n liegen alle Folgeglieder im " ε -Band" um Grenzwert $g=0$, egal wie schmal das Band ist.

BEACHTET: Grenzwert und (obere/untere) Schranke sind nicht dasselbe!! Die Folge hat die untere Schranke (z.B.) -1 , die obere Schranke $+1/2$ und den Grenzwert 0 .

Dieses anschauliche Bild " ε -Band" wird nun in eine Definition übersetzt.

Def D3-4: Grenzwert einer Folge

g heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n) , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Existiert der Grenzwert einer Folge, dann heißt die Folge **konvergent**. Man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$$

Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt **divergent**.

Es gilt:

Satz S3-1 Eine konvergente Folge ist beschränkt.

nur muss eben der Grenzwert nicht mit oberer/unterer Schranke zusammenfallen.

Die logische Umkehrung des Satzes ist manchmal auch nützlich:

Satz S3-2 Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

Eine unbeschränkte Folge, bei der für jedes K ab einem bestimmten $n_0(K)$ alle Folgenglieder über K liegen, heißt **bestimmt-divergent**, sie besitzt den **uneigentlichen Grenzwert** $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Genauso für **uneigentlichen Grenzwert** $-\infty$.

Beispiel für Grenzwerte:

1.) $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$

d.h. $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ "Nullfolge"

Beweis in Vorlesung

2.) $a_n = 1 - (-1)^n, n \in \mathbf{N}$

d.h. $(a_n) = 2, 0, 2, 0, 2, \dots$

$\Rightarrow (a_n)$ ist divergent

BEACHTEN: Nicht jede divergente Folge ist auch unbeschränkt (!!)

3.) $a_n = n^2 + 5, n \in \mathbf{N}$

d.h. $(a_n) = 6, 9, 14, \dots$

(a_n) ist nach **Satz S3-2** divergent, weil (a_n) nicht beschränkt ist.

(a_n) ist **bestimmt-divergent** und besitzt den **uneigentlichen Grenzwert** ∞ .

3.3.1. Rechnen mit Grenzwerten

Wir wollen für beliebige Folgen ohne viel Aufwand den Grenzwert berechnen. Der Weg:

1. Für einige wenige fundamentale Folgen den Grenzwert kennen
2. Andere Folgen durch Rechnen mit Grenzwerten auf Fundamentalfolgen zurückführen

Satz S 3-3 Fundamentale Nullfolgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0 \text{ für } |q| > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \text{ für } \alpha > 0$$

Satz S 3-4 Fundamentale bestimmt-divergente Folgen (+∞)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty \text{ für } |q| > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty \text{ für } \alpha > 0$$

Satz S 3-5 Rechengesetze für Grenzwerte

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b . Dann sind auch die

Folgen $(a_n + b_n), (a_n \cdot b_n), \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ für $(b_n \neq 0, b \neq 0)$ und $(a_n)^r$ für $r \in \mathbf{R}$

konvergent, und es gilt:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = ca$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^r = a^r$

Rechentechnisch: Man kann den Limes auf die Einzelterme "nach innen ziehen", z.B.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)}\right) \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)\right)^r$$

wenn der entstehende Term „entscheidbar“ ist.

Die Regeln von **Satz S 3-5** sind auch nutzbar, wenn Folgen a_n oder b_n gegen $\pm\infty$ "konvergieren", wenn man folgende Regeln verwendet

Satz S 3-6 Sei $c \in \mathbf{R}, d \in \mathbf{R}^+, \text{ also } d > 0$

$$c + \infty = \infty$$

$$\infty \cdot d = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{c}{\infty} = 0$$

$$(\infty)^d = \infty$$

$c + \infty = \infty$ ist so zu verstehen: Eine Folge, die gegen c konvergiert, plus eine Folge, die bestimmt divergent gegen ∞ geht, ergeben zusammen eine Folge, die bestimmt divergent gegen ∞ geht.

Dagegen sind nachfolgende Ausdrücke "**unentscheidbar**", d.h. ohne weitere Untersuchung kann NICHTS ausgesagt werden:

$0 \cdot \infty = ?$	$\infty - \infty = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$
----------------------	-----------------------	-------------------	-----------------------------

Dann muss man durch geeignete Umformungen versuchen, zu einer entscheidbaren Situation zu kommen.

In Vorlesung werden Folgerungen aus **Satz S 3-5** und **Satz S 3-6** gezeigt.

Regeln für die Berechnung von Grenzwerten:

- Komplizierte Ausdrücke auf Summe / Produkt / Quotient bekannter Folgen (meist Nullfolgen und konstante Folgen) zurückführen. (D.h. wenn möglich, den Limes "nach innen ziehen".)
- Bei Brüchen durch die größte Potenz **im Nenner** dividieren (**g.P.i.N.**).
- Wenn eine Summe von Termen die Situation $\infty - \infty$ ergibt, dann schauen, ob eine Zusammenfassung (z.B. auf gemeinsamen Hauptnenner) Klärung bringt.

Wann ist "nach innen ziehen" für Limes NICHT möglich? – Wenn dadurch eine "unentscheidbare" Situation (s. gelbe Tabelle nach **Satz S 3-6**) entsteht. Dann muss man versuchen, erst anderweitig zu vereinfachen.

Beispiele:

$$1a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 0$$

1b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{5n^3} . \text{ Wäre } \frac{\infty}{\infty} , \text{ wenn wir Grenzwert einfach so nach innen ziehen, also}$$

unentscheidbar. Natürlich mit „g.P.i.N.“ oder Kürzen einfach lösbar. Resultat: $\frac{3}{5}$

1c)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty}(-2) + \lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{4}{n}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty}(8) - \lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{3}{n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{-2 + 0 - 0}{8 - 0 + 0} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Hier haben wir zuerst „g.P.i.N.“ benutzt, damit konstante Folgen oder Nullfolgen entstehen und wir so den Limes nach innen ziehen dürfen.

$$1d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$1e) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Zur Übung: 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2$ 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right)$

$$4) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k-2}}$$

3.4. Anwendungen für Zahlenfolgen

3.4.1. Fixpunkt-Iteration

Die **Fixpunkt-Iteration** ist eine "quick-&-dirty"-Methode, um von nicht einfach lösbaren Gleichungen (sog. *transzendenten* Gleichungen) eine Lösung zu bestimmen:

1. Man bringt die Gleichung in die sog. **Fixpunkt-Form** $a = f(a)$.
(Hierfür gibt es oft zahlreiche Möglichkeiten, und man muss probieren, welche Lösung zum Ziel führt)
2. Jetzt startet man mit einem Wert a_1 und bestimmt $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, ... usw., also allgemein: $a_n = f(a_{n-1})$
3. Wenn die Folge (a_n) den Grenzwert a besitzt, dann ist a eine Lösung der transzendenten Gleichung.

Beispiel: Wir suchen eine numerische Lösung x für die Gleichung $x^2 = 2$.

Lösung: Sei $x \neq 0$. Wir addieren x^2 auf beiden Seiten und dividieren mit x durch:

$$2x^2 = x^2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x + \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = f(x)$$

Ersetzen wir das x auf der linken Seite durch a_n und die x auf der rechten Seite durch a_{n-1} , so erhalten wir eine sog. **rekursive Folge**:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{2}{a_1} \right) \\ &\dots \\ a_n &= \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right) = f(a_{n-1}) \end{aligned}$$

Wir können nun mit dem Taschenrechner (oder Excel) Werte einsetzen und erhalten:

(in Excel vormachen)

$$a_1=1, a_2=1.5, \dots, a_6=1.41421356$$

Wieso quick & dirty?

- Es gibt für jede Gleichung unendlich viele Fixpunkt-Formen. Man hat also keine Garantie, alle Lösungen gefunden zu haben
- Nicht jede Fixpunkt-Form muss einen Grenzwert haben.

Aber immerhin kann man überhaupt eine Lösung für schwierige Gleichungen finden!

3.4.2. Landausche $O()$ -Notation

[Teschl, Bd. 1, S. 204-210] oder [Hachenberger05, S. 383-387]²

In der Informatik muss man oft die Laufzeit von Algorithmen abschätzen. Beispiel Matrixmultiplikation: Man braucht n^3 Multiplikationen und $n^2(n-1)$ Additionen, also insgesamt

$$a_n = 2n^3 - n^2$$

Operationen. Wie wächst die Laufzeit, wenn die Matrixgröße n (Zeilenzahl) steigt? Oft interessiert man sich für das Grenzwertverhalten großer n , und hier ist n^3 der dominante Term :

Def D3-5: Landausche $O()$ -Notation

Seien $A=(a_n)$ und $B=(b_n)$, $b_n \neq 0$ Folgen. Wir definieren die Menge "**Groß-O**" von **B** durch

$$O(B) = O(b_n) = \{ (a_n) \mid \text{Der Quotient } \frac{a_n}{b_n} \text{ ist beschränkt} \}.$$

Man sagt dann: Die Folge A ist "**von der Ordnung $O(B)$** ", als Formel: $A \in O(B)$.

Für $A \in O(B)$ schreibt man üblicherweise (wenn auch ungenau) $A = O(B)$.

Beispiele:

$$1. 2n^3 - n^2 \in O(n^3), \text{ denn } \frac{2n^3 - n^2}{n^3} = 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

$$2. n+2 \in O(n), \text{ aber auch } n+2 \in O(n^2) \text{ oder } n+2 \in O(4n).$$

$$3. 6n \log(n) + 270n + 4 \in O(n \log(n))$$

ANMERKUNG: Die Folge $B=(b_n)$ wird dabei **meist** so gewählt, dass sie

1. möglichst einfach ist (also $b_n = n^3$ statt $2n^3 - n^2$ im Matrixbeispiel)
2. möglichst "billig" ist, im Sinne von Laufzeit-"Kosten" (also $b_n = n^3$ statt n^4 oder 2^n)

WARNUNG: Das Gleichheitszeichen in Aussagen mit der $O()$ -Notation ist NICHT das Gleichheitszeichen der Arithmetik, sondern nur eine (ungenau) Abkürzung für " $\in O(B)$ ". Denn aus $A=O(B)$ und $C=O(B)$ folgt NICHT $A=B$ und NICHT $A=C$. Mit der $O()$ -Notation drückt man aus, dass die Folgen A , B und C für **große n** zur selben Wachstumsklasse (Menge) gehören.

Es gilt folgende Reihung für Wachstumsklassen:

$$O(1) < O(\log(n)) < O(n) < O(n \log(n)) < O(n^2) < O(n^2 \log(n)) < \dots < O(2^n)$$

Hierbei bedeutet z.B. $O(\log(n)) < O(n)$:

Für jeden Vertreter $a_n \in O(n)$ mit $a_n \notin O(\log(n))$ gilt: $\frac{a_n}{\log(n)}$ ist divergent.

Mit anderen Worten: $a_n \in O(n)$ wächst stärker als $c \cdot \log(n) \forall c \in \mathbb{R}$.

² [Hartmann04, S. 245-249] bringt die $O()$ -Notation auch, allerdings Schreibweise etwas unpräzise.



Übung: Ordnen Sie den Folgen ein möglichst einfaches und "billiges" $O(B)$ zu.

	Folge	
(1)	$2n^3 - n^2$	$O(n^3)$
(2)	$7n^5 + 26n^6$	
(3)	$n + 3n^2 - 2n \log(n)$	
(4)	$\frac{n^4 + n^2}{n + 5}$	
(5)	$\frac{n^4 + n^2}{n + 5} - n^3$	

In Vorlesung **oder Übung**: Tabelle mit Vergleich verschiedener Laufzeitverhalten, weitere Bsp. zu **Fixpunkt-Iteration**.



Übung: A_n, B_n, \dots seien die Laufzeiten verschiedener Algorithmen. Entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3: Welcher Algorithmus, erster oder zweiter, ist jeweils für große n schneller?

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 - 5$
Fall 2	$C_n = \frac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50}$	$D_n = \frac{(n+1)!n}{(n-1)!(n+1)^2}$
Fall 3	$E_n = 10n + 10^{-3}n^4$	$F_n = 10n + 2000n^2$

Hinweis: Bilden Sie jeweils „Erster / Zweiter“

3.5. *Fazit zu Folgen*

Wir haben in diesem Kapitel folgende Begriffe kennengelernt:

- Grenzwert: wenn schließlich alle Folgenglieder in einem " ε -Schlauch" liegen
- konvergente Folge: hat ein endliche Zahl als Grenzwert (Limes)
- divergente Folge: das Gegenteil
- bestimmt-divergente Folge: hat $+\infty$ oder $-\infty$ als Grenzwert (uneigentlicher G.)

Wichtige Resultate:

- Mit Grenzwerten kann man rechnen: Operator $\lim_{n \rightarrow \infty}$ vertauschbar mit den meisten Grundrechenoperationen.
- Techniken: g.P.i.N., Hauptnenner, ...

Was man sich merken sollte:

- die fundamentalen Nullfolgen aus Satz S 3-3 und
- die fundamentalen bestimmt-divergenten Folgen aus Satz S 3-4.