

Übungsblatt 3 Funktionen

Zur Bearbeitung der nachfolgenden Aufgaben sollten Sie auch die Inhalte aus dem Kapitel „VORKURSWISSEN: Funktionen“ durchgearbeitet haben bzw. beherrschen!

Aufgabe 3.0 Definitionsbereiche

Geben Sie für die nachfolgenden Funktionen die maximalen Definitionsbereiche in $\mathbf{R}$ an!

$$(a) f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(b) f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} + \frac{\sqrt{2-4x}}{\sqrt{2+4x}},$$

$$(c) f(x) = \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right),$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x^4-3x^3}$$

Aufgabe 3.1 injektiv, surjektiv, bijektiv

Bestimmen Sie für folgende Funktionen (jeweils mit kurzer Begründung), ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

Für diejenigen Funktionen, die nicht bijektiv sind: Geben Sie eine Möglichkeit an, wie Sie Definitionsbereich und/oder Zielmenge so einschränken können, dass die Funktion bei gleichem Funktionsverlauf bijektiv ist.

[Hinweis: Eine Skizze der Funktion kann helfen!]

$$(a) f: \mathbf{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}^{\geq 0} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt{10x}$$

$$(b) f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = -2 \sin(x) + 2$$

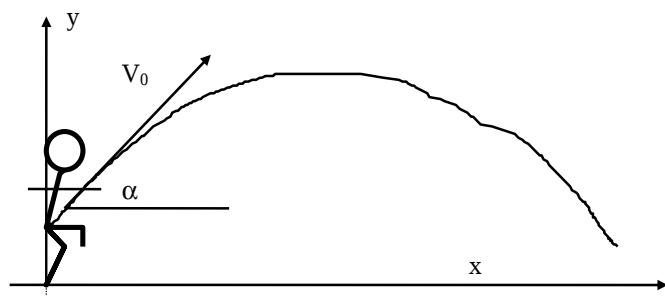
$$(c) f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = e^{-(x-1)^2}$$

Aufgabe 3.2 Weitspringer

Ein Weitspringer springt unter einem Absprungwinkel α und einer Absprunggeschwindigkeit v_0 ab. Seine Flugbahn kann bei vernachlässigter Reibung durch $(x(t), y(t))$ beschrieben werden mit:

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha,$$

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$$



Man bestimme **Flugdauer T** und **Flugweite W**. Für welchen Winkel α werden Flugdauer bzw. Flugweite maximal? Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Springer unter irdischen Bedingungen ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$) abspringen, um bei einem Absprungwinkel von 45° eine Weite von 9m zu erreichen?

Aufgabe 3.3 Schnittpunkte

Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Kurven y_1 und y_2 :

$$y_1(x) = 6 \cos^2(x), \quad y_2(x) = 5 - \sin(x)$$

Aufgabe 3.4 Parabelapproximation

Die Sinusfunktion $y = \sin(x)$ ist im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ durch eine Parabel zu ersetzen, die mit ihr in den beiden Nullstellen und im Maximum übereinstimmt. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Aufgabe 3.5 Grenzwerte von Funktionen

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die gesuchten Grenzwerte

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{für} \quad f(x) = \frac{6x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \quad \text{für} \quad g(x) = \frac{(1 - \cos(2x))e^{x+2}}{2 \sin^2(x)e^{x+3}}$$

Hinweis: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Aufgabe 3.6 Grenzwerte von Funktionen 2

Bestimmen Sie über den Satz aus der Vorlesung

Satz S4-2: f hat bei x_0 Grenzwert $g \Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n) \rightarrow x_0$ gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$

ob die nachfolgenden Grenzwerte existieren und wenn ja, was der Wert für g ist:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x}{5x^2 + 3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x^2+27}{x^2-9} \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos(x)}{x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(x)$$

[Zusatzfrage: Wieso steht bei (c) im Limes $0+$ und nicht einfach 0 ?]

Aufgabe 3.7 Wie hoch ist der Berg?

Blutrot versinkt die Sonne am Äquator im Meer. Wir sitzen im leise schaukelnden Boot und blicken zurück auf die Küste im Osten, an der sich steil ein mächtiger Berg erhebt. Genau um 18:08 erreicht der Schatten der Dämmerung den Saum der Küste und genau 7 Minuten später, um 18:15, verlöscht der letzte Sonnenstrahl an der Spitze des Berges. Wie hoch ist der Berg? (Erdradius = 6000 km. Wir nehmen hier vereinfachend an, dass die Erdachse nicht gekippt sei.)

Machen Sie sich eine Skizze mit Sonnenstrahlen, Erde und Berg.

Wie ändert sich die Lage, wenn wir uns auf dem 50. Breitengrad befinden?

Aufgabe 3.8 Logarithmus-/Exponential-Gleichungen

Lösen Sie folgende Gleichungen, in denen $x \in \mathbf{R}$ im Logarithmus oder im Exponenten auftaucht. Bestimmen Sie ferner den maximalen Definitionsbereich für x .

(a) $\ln(x - 1) = 1 + \ln x$

(b) $\ln(x + 1) = 1 + \ln x$

(c) $\lg(x^2 + 80x) = 2 + \lg(x - 1)$

(d) $\log_3(\log_9(x)) = -2$

(e) $25^{\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{5}$