V MA1 – 24.10.2018

Orga

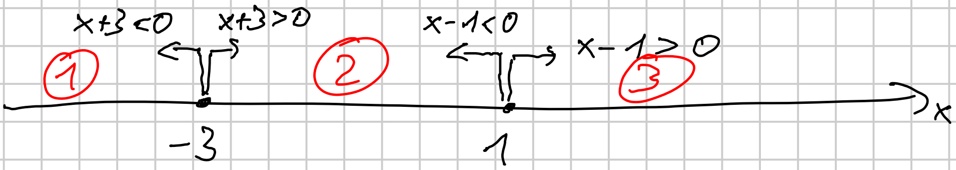
	Di 11	Mi 13 3.108	Mi 13 3.101	Mi 15 3.102	~~Mi 15 3.108~~	Σ
TN	~25	50-60	50	2-5	~~2~~	135

Wdh Ü Lösen Sie $\quad |\underbrace{x-1}_{=0}| - 3|\underbrace{x+3}_{=0}| = 1 \qquad (1)$

Lsg: Umschlagspunkte finden: Argument vom Betrag ist 0

1) $x-1=0 \Rightarrow x=1$

2) $x+3=0 \Rightarrow x=-3$



Fall ①: $x-1<1 \land x+3<0$

aus (1) wird: $-(x-1)-\left(-3(x+3)\right) = 1$

$\Leftrightarrow -x+1+3x+9 = 1$

$\Leftrightarrow 2x = -9$

$x = -\frac{9}{2}$

$= -4{,}5$ ✓ passt in ① $(-\infty, -3]$

Fall ②: $x-1<0 \land x+3>0$

aus (1) wird: $-(x-1)-3(x+3) = 1$

$\Leftrightarrow -x+1-3x-9 = 1$

$\Leftrightarrow -4x = 9$

$\Leftrightarrow x = -\frac{9}{4}$

$= -2.25$ ✓ passt in ② $[-3, +1]$

Fall (3) $\quad x-1>0 \ \wedge \ x+3>0$

aus (1) wird:

$$
\begin{aligned}
& & (x-1) - 3(x+3) &= 1 \\
&\Leftrightarrow & x - 1 - 3x - 9 &= 1 \\
&\Leftrightarrow & -2x &= 11 \\
&\Leftrightarrow & x &= -\frac{11}{2}
\end{aligned}
$$

↯ passt NICHT in (3): $[1, \infty)$

insgesamt $\quad \underline{\underline{L = \left\{-\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}\right\}}}$

Faktorenzerlegung

$\boxed{x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5}$

(ü) a)

$$
\begin{aligned}
& & x^2 - 25 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 5^2 &= 0 \quad | \text{ 3. Binom. Formel} \\
&\Leftrightarrow & (x-5)(x+5) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \underline{\underline{x=5}} &\vee \underline{\underline{x=-5}}
\end{aligned}
$$

$D = \mathbb{R} \quad , \quad L = \{-5, 5\}$

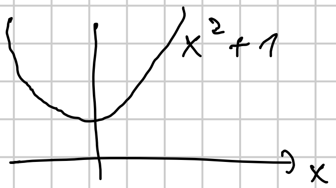
b)

$$
\begin{aligned}
& & x \ln(x^2+1) + x^2 \ln(x^2+1) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & (x + x^2) \cdot \ln(x^2+1) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \underbrace{x}_{a} \underbrace{(1 + x)}_{b} \cdot \underbrace{\ln(x^2+1)}_{c} &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \underline{\underline{x=0}} \ \vee \ \underline{\underline{x=-1}} \ \vee \ \ln(x^2+1) &= 0
\end{aligned}
$$

$x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$D = \mathbb{R}$

$L = \{0, -1\}$



immer >0, passt

c)

$$
\begin{aligned}
& & x \ln(x) + x^2 \ln(x^2) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & x(\ln(x) + x \ln(x^2)) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & x(\ln(x) + x\, 2 \ln(x)) &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \underbrace{x}_{a} \underbrace{(1 + 2x)}_{b} \underbrace{\ln(x)}_{c} &= 0
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \quad x=0 \quad \vee \quad 1+2x=0 \quad \vee \quad \ln(x)=0$

$\Leftrightarrow \quad x=0 \quad \vee \quad x=-\frac{1}{2} \quad \vee \quad x=1$

$D = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ wg $\ln(x)$, keine nicht-positiven x erlaubt

$L = \{1\}$

Summen

Jede Summe kann man sich auch ausgeschrieben vorstellen:

$$\sum_{k=1}^{m} A_k = A_1 + A_2 + \dots + A_m$$

$$\sum_{k=1}^{m} c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{m\text{-mal}} = m \cdot c$$

Aufgabe

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} k^4 - \sum_{k=4}^{54} (k-2)^4$

$$= 1^4 + \cancel{2^4} + \cancel{\dots} + \cancel{50^4}$$
$$-(\cancel{2^4} + \cancel{\dots} + \cancel{50^4} + 51^4 + 52^4)$$
$$= 1^4 - 51^4 - 52^4$$
$$\approx -14 \cdot 10^6$$

b) $\displaystyle\left(\sum_{j=1}^{50} (j-1)j\right) - \left(\sum_{i=3}^{52} i(i+1)\right)$ | $\boxed{\text{Skript}}$ $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{50} i(i-1)\right) - \left(\sum_{i=3}^{52} i(i+1)\right)$

$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cancel{3 \cdot 4} + \cancel{\dots} + \cancel{49 \cdot 50}$$
$$-(\cancel{3 \cdot 4} + \cancel{\dots} + \cancel{49 \cdot 50} + 50 \cdot 51 + 51 \cdot 52 + 52 \cdot 53)$$
$$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 50 \cdot 51 - 51 \cdot 52 - 52 \cdot 53$$

Doppelsummen

$$(c_{ik}) = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & k \quad i \\ \left(\begin{matrix} 15 & 27 & 255 \\ 3 & 18 & 5 \\ 12 & 8 & 100 \end{matrix}\right) & & & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array} = C$$

Summe $15 + 27 + 255$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} c_{ik} = \Big(\underbrace{(15+27+255)}_{\text{Zeile 1}} + \underbrace{(3+18+5)}_{\text{Zeile 2}} + \underbrace{(12+8+100)}_{\text{Zeile 3}} \Big)$$

Übung separierbare Doppelsummen

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}}$$

a) $$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{10} k \cdot i = \left(\sum_{k=1}^{2} k\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{10} i\right)$$

$$= (1+2) \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)$$

$$= 3 \cdot 55 = \underline{\underline{165}}$$

b) $$\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} \left((k \cdot i)^2 + 5\right)$$

Satz 2-11

$$= \left(\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} k^2 \cdot i^2\right) + \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{3} \underbrace{\sum_{i=1}^{4} 5}_{4 \cdot 5}}_{3 \cdot 4 \cdot 5}\Bigg)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{3} k^2\right)\left(\sum_{i=1}^{4} i^2\right) + 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$= (1+4+9)(1+4+9+16) + 60 = \underline{\underline{480}}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \underset{k>0}{=} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\cancel{(n-k)}\cdot\cancel{(n-k-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{2\cdot 1}}{k!\;\cancel{(n-k)(n-k-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{2\cdot 1}}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

$k=0$ $k=n$

$$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\;\cancel{n!}} = 1 \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\;0!} = 1$$

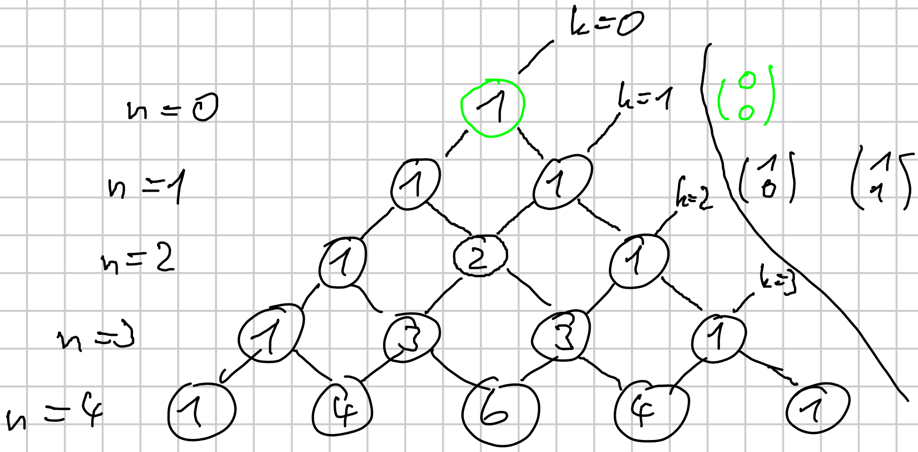
Symmetric

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

$$\binom{100}{2} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1} = 4950 = \binom{100}{98}$$

$$\binom{100}{50} = \;? \qquad \text{(viel Arbeit)}$$

Pascal'sche Dreieck



oder

n \ k	0	1	2	3	4			
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = 1b^7 + 7ab^6 + 21a^2b^5 + 35a^3b^4 + 35a^4b^3 + 21a^5b^2 + 7a^6b + 1a^7$$

Ü

a) $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1)n$$

b) $$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n\cdot(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \underset{\uparrow}{=} \frac{1+n}{n(n-1)!} = \frac{1+n}{n!}$$

HN $n(n-1)!$