

Mathematik I - Vorlesung

14.11.2018

(Vertretung Prof. Konen)

Thema heute : Lineare Algebra (wird im Dez. von mir (Dr. Schmitter) fortgesetzt)

Woche ab 19.11. Profilwoche keine V, keine Ü
danach V u Ü bei Prof. Konen (2 Wo)
danach V u Ü bei Dr. Schmitter

Für alle, die am Praktikum teilnehmen
bis zum 2. P.-Termin (ab 4.12.) soll die Lernkarte so
bearbeitet werden, dass alle Knoten gelb oder grün sind,
sonst **kein** Testat.

Lineare Algebra



lineare Gleichungssysteme

$$a_{11} \underline{x_1} + a_{12} \underline{x_2} + a_{13} \underline{x_3} = b_1 \quad x_1, x_2, x_3 \text{ Unbekannte}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

3 Unbekannte $\Rightarrow$ 3 Gleichungen (lineare gl.)

NB: lineare Funktion
Gerade

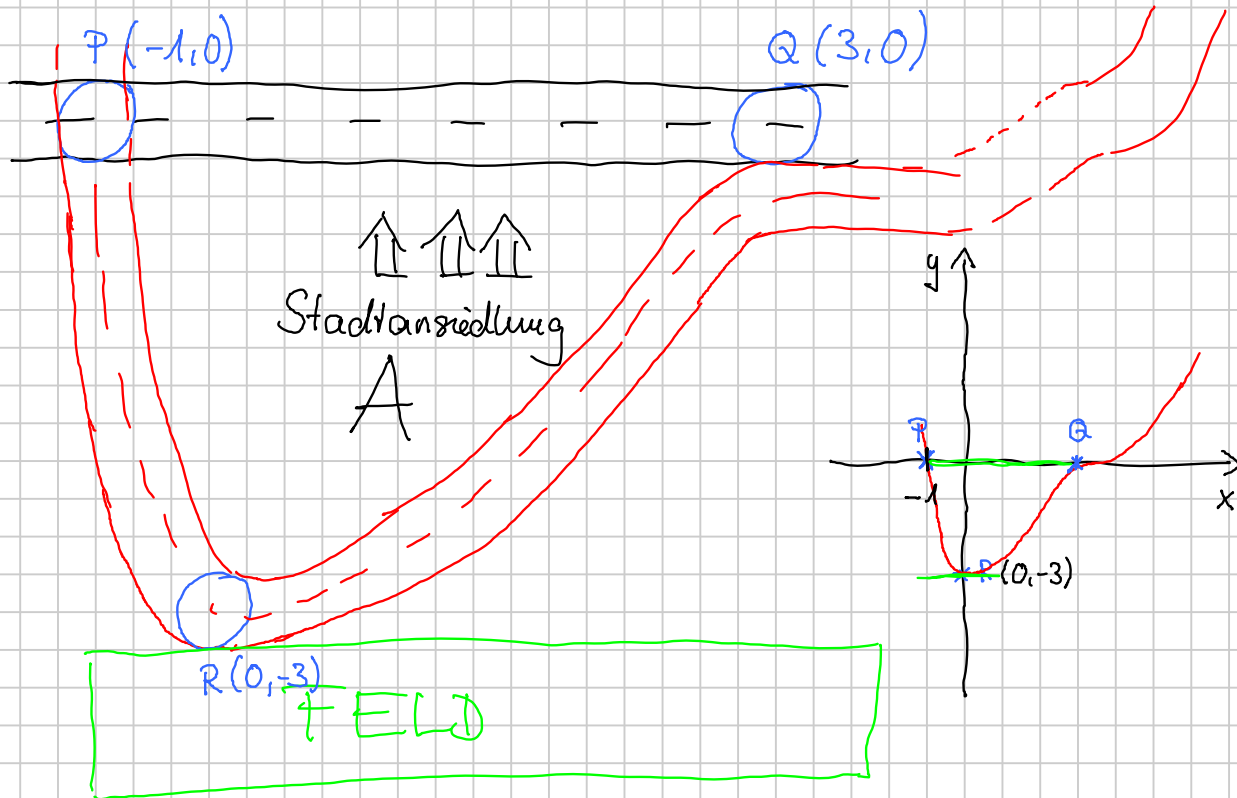
$$y = \underline{mx} + b$$

linear: das "x"
nur in 1. Potenz

$$5 = 6x - 13$$

Bp:

Bp:



Straßenverlauf der Umgehungsstraße wird beschrieben durch eine ganzrationale Fkt. 4. Grades

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Achtung: die Unbekannten sind hier: a, b, c, d, e

$$PP(-1,0) : a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)^2 + d \cdot (-1) + e = 0$$

$$PP(3,0) : a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3 + e = 0$$

3 Gleichungen

$$PP(0,-3) : a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = -3$$

In den Punkten R und Q ist die Steigung der gesuchten Fkt. 0

(waagrechte Tangente)

$$f' = y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$(R(0,-3)) f'(0) = 0 : 4 \cdot a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$$

$$(Q(3,0)) f'(3) = 0 : 4 \cdot a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 + 2c \cdot 3 + d = 0$$

2 Gleichungen

$$a - b + c - d + e = 0$$

$$81a + 27b + 9c + 3d + e = 0$$

$$e = -3$$

$$d = 0$$

$$108a + 27b + 6c + d = 0$$

Daraus erhält man : $a - b + c - 3 = 0$

$$81a + 27b + 9c - 3 = 0$$

$$108a + 27b + 6c = 0$$

$$a - b + c = 3$$

$$81a + 27b + 9c = 3$$

$$108a + 27b + 6c = 0$$

a, b, c Unbekannte

hier wird der
Gauß'sche Lösungsalgorithmus
durchgeführt

$$\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 3 \\ 81 & 27 & 9 & 3 \\ 108 & 27 & 6 & 0 \end{array}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

↓ das bedeutet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 81 & 27 & 9 \\ 108 & 27 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

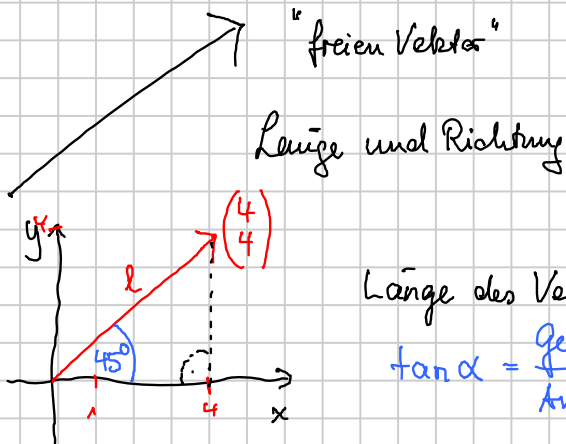
Koeffizientenmatrix
 3×3

Variablen-
vektor
 3×1

3×1

Vektorrechnung

Vektor :



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

5 dimensionaler Vektor
kann man nicht mehr
graphisch darstellen

Länge des Vektors (Pythagoras) : $l^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow l = \sqrt{32}$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Geg.kath.}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{hier: } \tan \alpha = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

dagegen: Skalar : Größen, durch eine Zahl beschrieben

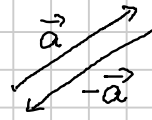
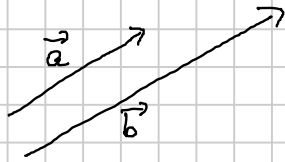
Bp: Länge, Gewicht,
Preis etc.

Vektor : Länge und Richtung



$\vec{AB}$

parallele Vektoren:



$-\vec{a}$ inverse Vektor

Nullvektor: $\vec{0}$

Länge des Nullvektors: 0

$$|\vec{0}| = 0$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$ Vektorraum

Einheitsvektor: $\vec{e}$

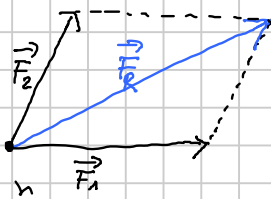
$$|\vec{e}| = 1$$

Ortsvektor $\vec{OP}$

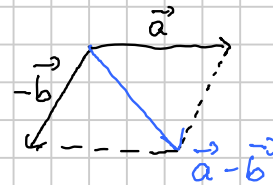
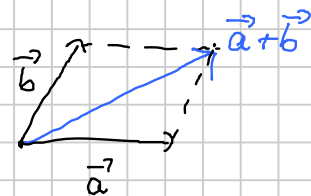


Rechnen mit Vektoren

1) Addition



Kräfteparallelogramm

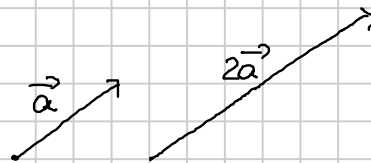


Es gilt $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ Assoziativgesetz

Vektorpolygon: Summe von mehr als zwei Vektoren

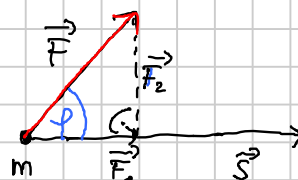
Multiplikation mit einem Skalar:



Geg: $\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot \vec{a}$ ist das λ -fache von $\vec{a}$ und hat die Länge $|\lambda \cdot \vec{a}|$

Skalarprodukt

Herleitung zunächst aus Physik:



$$\cos \varphi = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}|}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$W = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{s}| \quad \text{Arbeit} \quad (\text{Kraft} \cdot \text{Weg})$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$$

$$W = |\vec{s}| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$$

führt auf die Def. des Skalarproduktes

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ Vektoren} \quad \varphi = \angle \vec{a}, \vec{b} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Schreibweise: } c = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Achtung: Das Ergebnis des Skalarproduktes zweier Vektoren ist eine reelle Zahl, ein Skalar

$$\text{Frage: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad ? \quad \text{ja}$$

$$\text{Es gilt: } (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{Frage: } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{Distributivgesetz?} \quad \text{ja}$$

$$\text{Es gilt: } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\text{da } \cos 90^\circ = 0)$$

$$\text{Frage: } \vec{a} \cdot (\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}_{\text{Skalar}}) = (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{\text{Skalar}}) \cdot \vec{c} \quad ? \quad \text{nein}$$

Vektorprodukt $\Rightarrow$ später

Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems

$$\text{Bsp: } \vec{a}, \vec{b} \quad \text{mit } \vec{b} = \frac{2}{3} \vec{a} \Rightarrow 3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$$

Def: (Linearkombination)

geg: $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$

$\vec{a}$ heißt Linearkombination von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$$

Def: (Lineare Unabhängigkeit)

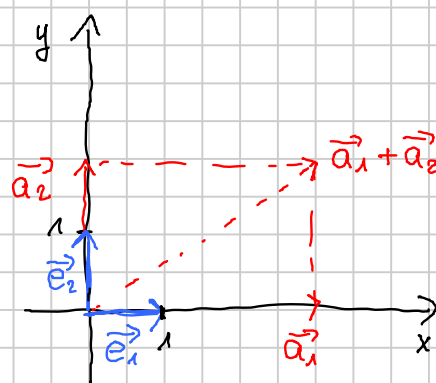
Gilt $\vec{0} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$

dann heißen $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ linear unabhängig

In Worten: linear unabhängig bedeutet: der Nullvektor lässt sich nur "trivial" lin. kombinieren

Koordinaten



$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ Einheitsvektoren
 $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

Jeder Vektor $\vec{a}$ kann in den Ursprung eines Koord. Systems geschrieben werden

$$\vec{a} = |\vec{a}_1| \cdot \vec{e}_1 + |\vec{a}_2| \cdot \vec{e}_2 \quad |\vec{a}_1| = a_1$$

$$= a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad |\vec{a}_2| = a_2$$

Linearkombination aus $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$

Frage: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Antwort: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$

Frage: Sind $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ linear unabhängig?

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

Jeder Vektor von $\mathbb{R}^2$ (Ebene) lässt sich aus $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ linear kombinieren
 $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$

Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis in $\mathbb{R}^3$
 $\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$

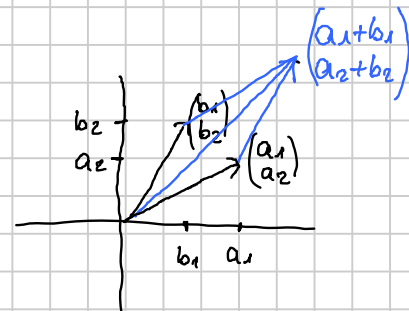
Mit den so definierten Koordinaten kann man n -dimensionale Vektoren (n -dim. Vektorräume) definieren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \quad \quad \mathbb{R}^3 \quad \quad \mathbb{R}^n$

Rechnen mit mehrdimensionalen Vektoren:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$



Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in \mathbb{R}$$

Achtung: Skalarprodukt kann von Vektoren gleicher Dimension berechnet werden.

Auch für n -dimensionale Vektoren

Bp:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 100$$