V MA1 – 28.11.2018

<u>Orga</u> Sprechstunde heute fällt leider aus

MathWeb – jeder Knoten in Lernkarte gelb/grün
– Testimonials

Grenzwert

Bsp $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Einsetzen würde liefern $\frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0} = ?$ (unentscheidbar)

<u>Bsp</u>

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{für } x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x > 0,\ x \neq 1 \end{cases}$$

Was sind die Grenzwerte an bestimmten Punkten?

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$: Für jede Folge $(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ ↯ unentscheidbar}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = x+1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n + 1) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

b) $\lim_{x \to 0-} f(x)$: Sei $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ eine "linksseitige" Folge, z.B. $x_n = -\frac{1}{n}$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

bestimmt-divergent

$\Rightarrow$ $f(x)$ hat Polstelle bei $0-$

c) $\lim_{x \to 0+} f(x)$: Sei $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0+$ eine Folge

Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{0-1}{0-1} = \underline{\underline{1}}$

Ü

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[(x+1)\cos(x-1) + \frac{\sin(x-1)}{x+1} \right]$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{x+2}{x-1} - \frac{x^2+2x+3}{x^2-1} \right]$

Lsg

a) 1 einsetzen: $(1+1)\cos(0) + \frac{\sin(0)}{1+1} = 2 \cdot 1 + \frac{0}{2} = \underline{\underline{2}}$

b) 1 einsetzen: $\frac{3}{0} - \frac{6}{0} = \infty - \infty$ ↯

N.R. $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{\cancel{x^2} + 3x + 2 - (\cancel{x^2} + 2x + 3)}{(x-1)(x+1)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 einsetzen}}}{=} \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Nachfrag zum Beispiel Polstelle weiter oben

Wir hatten $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \infty$ (Polstelle

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$

Existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? Nein, denn $z^- \neq z^+$

Letztes Beispiel: Was ist $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$?

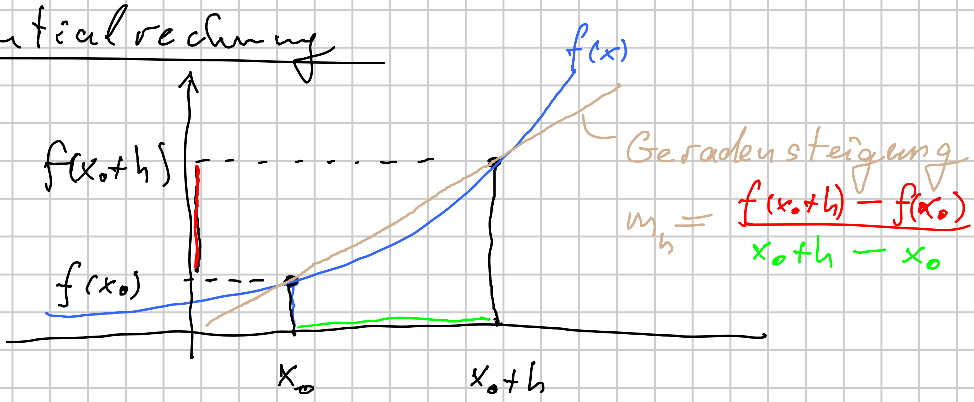
Anleihe aus Kap 5.4 (Taylorreihe)

Es gilt $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots \right) = \underline{\underline{1}}$$

Differentialrechnung



$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ (Einsetzen $h=0$ führt auf $\frac{0}{0}$ - Situation)

$$= f'(x_0)$$ (Ableitung von f an der Stelle x_0)

(= Steigung von f " " x_0)

Bsp: $f(x) = x^2$ Was ist $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

Also: $f'(x) = 2x$

allg. Regel $\boxed{f(x) = x^a \Rightarrow f'(x) = a x^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{R}}$

$$(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$$
$$(x^0)' (= 0 \cdot x^{-1}) = 0$$

Bsp zu Quotientenregel

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

N.R.

$u(x) = x^2$ $\quad v(x) = x+1$

$u'(x) = 2x$ $\quad v'(x) = 1+0 = 1$

$$f'(x) = \frac{vu' - v'u}{v^2}$$
$$= \frac{(x+1)2x - 1\cdot x^2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}}}$$

Übung: $f(x) = \frac{1}{x}$ Berechnen Sie die 1., 2., 3. Ableitung, also $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$

Hinweis
$(x^a)' = a x^{a-1}$

Lsg: kann man mit Quotientenregel machen, muss man aber nicht

Besser: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f'(x) = -1x^{-2}$$
$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3}$$
$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 2 \cdot (-3)x^{-4} = -6x^{-4}$$

Kettenregel

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

äußere innere
Funktion

Bsp 1)

$$h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2$$
$$= g(f(x))$$

NR
$g(u) = u^2$ $g'(u) = 2u$
$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$
s.o.
(Bsp. Quotientenregel)

$$h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$$
$$= 2\frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2(x^2+2x)}{(x+1)^3}$$

Bsp 2)

$$h(x) = (\sin x)^3$$

NR
$g(u) = u^3$ $g'(u) = 3u^2$
$f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$$h'(x) = \underline{\underline{3(\sin x)^2 \cdot \cos x}}$$

Ü b) $g(x) = \sin(x^3)$

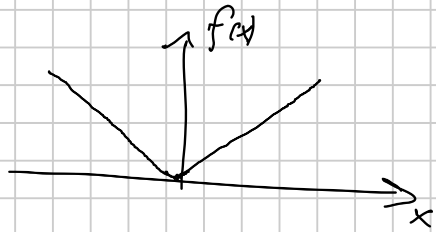
$g'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

c) $h(x) = e^{\sin(x^2)}$

$= \underline{\underline{e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x}}$

Ableitung der Betragsfunktion

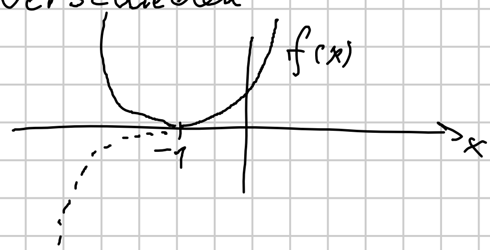
$f(x) = |x|$ Was ist $f'(x)$



$$= \begin{cases} x & f\ x \geq 0 \\ -x & f\ x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & f\ x > 0 \\ -1 & f.\ x < 0 \end{cases}$$

Ist $f'(0)$ definiert? – Nein, denn rechtsseitige und linksseitige Ableitung (1 und −1) sind verschieden



Bsp 2) $f(x) = |(x+1)^3|$

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & f\ x > -1 \\ -(x+1)^3 & f.\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & f.\ x > -1 \\ -3(x+1)^2 & f.\ x \leq -1 \end{cases}$$

Existiert $f'(-1)$? – Ja, denn rechtsseitige und linksseitige Ableitung (0 und 0) sind beide gleich (einfach $x = -1$ einsetzen)

$f'(-1) = 0$