V MA1 – 5.12.2018

Orga
- ab nä: Ane Schmitter V+Ü
- Testimonials MathWeb → E-Mail an mich

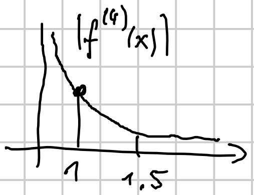
Bsp Taylor $f(x) = \ln(x)$, $n=3$, $x_0 = 1$

Wie groß ist der Fehler für Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_1 = 1.5$?

Nach Restgliedformel

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

Was ist Max.wert von $|f^{(4)}(x)|$ im Intervall $x \in [\overset{x_0}{1}, \overset{x_1}{1.5}]$?



Da $|f^{(4)}(x)|$ monoton fallend ist, ist $|f^{(4)}(x)|$ an der Stelle 1 max. mit $|f^{(4)}(1)| = 6 = C$

$$|R_3(1.5)| = \frac{6}{(3+1)!} \cdot |1.5-1|^{3+1} = 0.0156$$

Probe: $|\ln(1.5) - \underbrace{0.41\bar{6}}_{P_3(1.5)}| = 0.01120$ ✓

Übung Bestimme Taylor-Poly für $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ zum Grad $n=5$. Wie genau ist Taylor-Poly $P_5(x_1)$ für $x_1 = 0.3$?

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\overset{x_0}{0})$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	

$x - x_0 = x$

$$P_5(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5$$

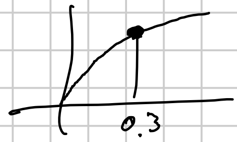
$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \left(-\frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \right)$$

$$\Rightarrow P_5(0.3) \underset{\text{T.R.}}{=} 0.29552025$$

Restglied: a) grobe Abschätzung $|f^{(6)}(x)| = |-\sin(x)| \leq 1 = C$

$$\Rightarrow \quad |R_5(x)| = \frac{1}{6!}|x-0|^6 \quad \Rightarrow \quad |R_5(0.3)| = \frac{1}{6!}\, 0.3^6 \approx \underline{\underline{1 \cdot 10^{-6}}}$$

b) genauere Abschätzung: $[x_0, x_1] = [0, 0.3] \Rightarrow$ dort ist $|-\sin(x)|$ monoton wachsend $\Rightarrow C = |\sin(0.3)|$ $= 0.2955$ ist bessere Abschätzung



$$\Rightarrow |R_5(x)| = \frac{0.2955}{6!}\, 0.3^6 \approx \underline{\underline{2.9 \cdot 10^{-7}}}$$

Probe: $|P_5(0.3) - \sin(0.3)| \underset{\text{T.R.}}{=} 4.4 \cdot 10^{-8}$ ✓

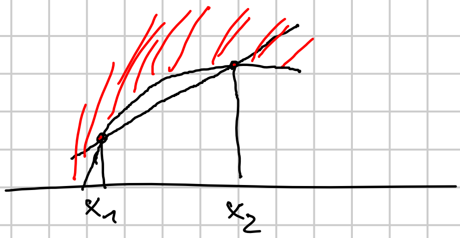
Eigenschaften diff.barer Funktionen

- (Nullstellen)

3 • Extrema: Min, Max
4 • Wendepunkte / Sattelpunkte
1 • monoton wachsend / fallend (Steigungsverhalten)
- (Grenzwert) $\Rightarrow$ L'Hospital 5

2 • Krümmungsverhalten
- (Asymptoten)

Krümmungsverhalten



konkav

konvex

Merkspruch: „Ist der Bauch konkav, war die Anna brav
" " " konvex, hatte Anna ... "

Konvexität: Wichtig für Minimierung
(lokales Min ist auch global)

Extremwerte

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x-2) = 0$

$\iff x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

sind Kandidaten für Extrema

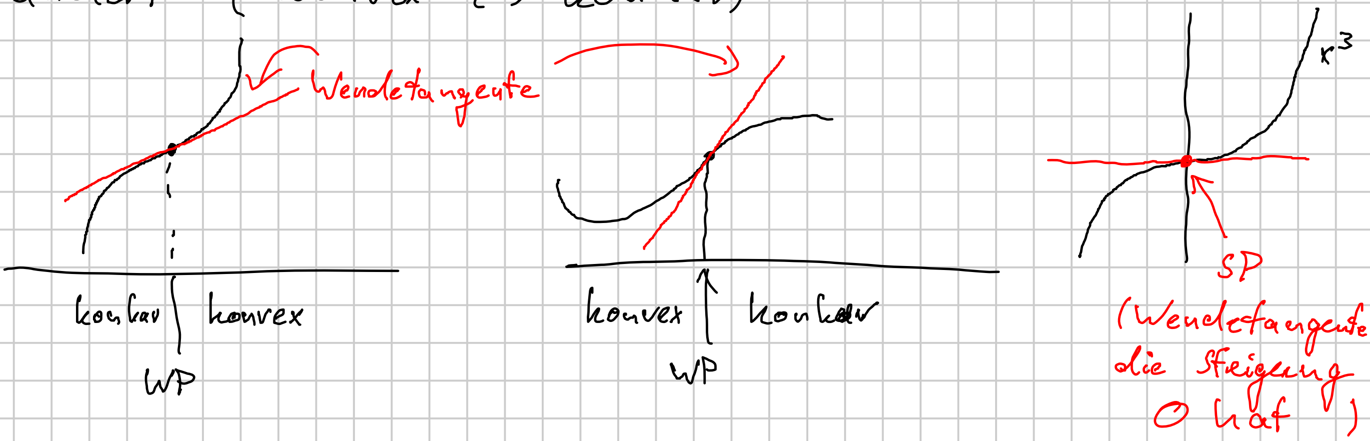
$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ ist Max

$f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow x = 2$ ist Min

Wendepunkt

ein Punkt, an dem die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert (konvex ⟺ konkav)



Ü $f(x) = \underbrace{x}_{g}\underbrace{(x-3)^2}_{h}$: Nullstellen, WP, Wendetangente(n)

1\. Abl. auf 2 Arten:

a) Produktregel: $f'(x) = 1\cdot(x-3)^2 + x\cdot 2(x-3)\cdot 1$

$= (x-3)\left[(x-3)+2x\right]$

$= (x-3)\,3(x-1)$ ⇒ Kandidaten f. Extremwerte $x_0=3, x_1=1$

$= \underline{3x^2-12x+9}$

b) $f(x) = x(x^2-6x+9)$

$= x^3-6x^2+9x$

$f'(x) = \underline{3x^2-12x+9}$

$f''(x) = 6x-12$

$f'''(x) = 6$

Nullstellen von $f(x) = x(x-3)^2 = 0$ sind $x=0 \lor x=3$

Wendepunkt: 1) $f''(x) = 6x-12 = 0 \iff \underline{\underline{x=2}}$ ist W.P.

2) $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$

Wendetangente: $f'(2) = -3$

$f(2) = 2\cdot(2-3)^2 = 2$

$w(x) = f(2) + f'(2)(x-2)$

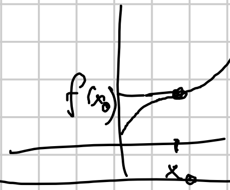
$= 2 + (-3)(x-2) = \underline{\underline{-3x+8}}$

N.B.

f hat in x_0 einen Wendepunkt

$\overset{\text{lax}}{\Longrightarrow}$ $x_0 = \ldots$ ist WP

(etwas ungenau)



$\boxed{\text{WP}: (x_0, f(x_0))}$

Ü Anschaffungskosten / Reparaturkosten

$$f(t) = A(t) + R(t)$$
$$= \frac{K}{t} + 100 + 3t^3 \overset{!}{=} \text{Min}$$

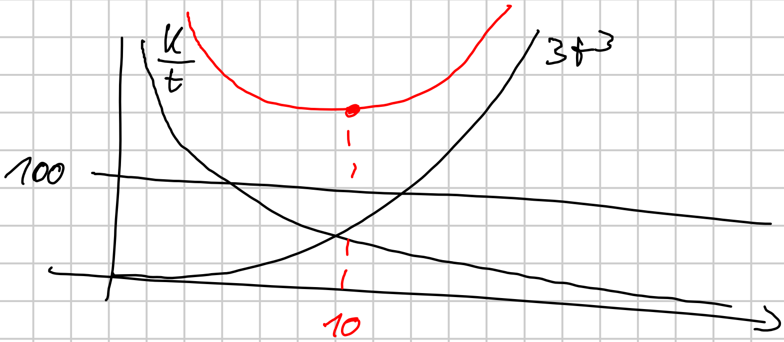
Lsg: $f'(t) = -\frac{k}{t^2} + 9t^2 = 0 \quad \left| +\frac{k}{t^2}, \cdot t^2 \right.$

$$\Leftrightarrow \quad 9t^4 = k = 90\,000$$
$$\Leftrightarrow \quad t^4 = 10\,000$$
$$\Leftrightarrow \quad t = 10 \quad \text{(nur pos. } t\text{)}$$

Ist das Minimum?

$f''(t) = +2\frac{k}{t^3} + 18t > 0$ wenn $K, t > 0$

$f''(10) = \ldots$



L'Hospital

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = \underline{\underline{1}}$

$\frac{0}{0}$ - Situation

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} \underset{\uparrow}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

$\frac{0}{0}$ - Situation $\qquad$ $\frac{0}{0}$ - Situation