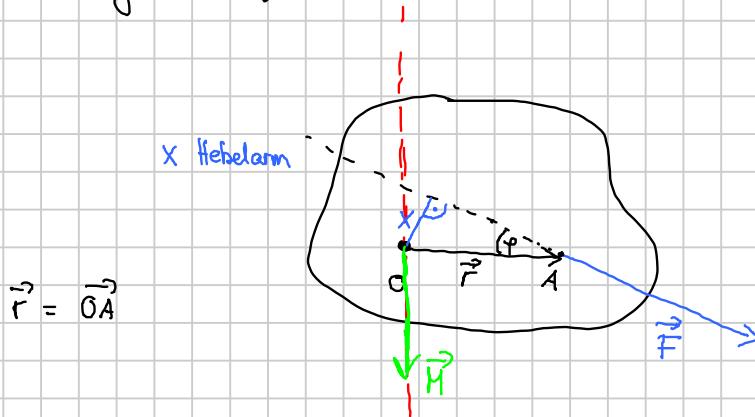


Mathematik Vorlesung 12.12.18

Vektorprodukt (nur im $\mathbb{R}^3$)

Herleitung aus Physik:



$$x = |\vec{r}| \cdot \sin \varphi$$

Drehmoment M : Produkt aus Kraft $\times$ Hebelarm

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot x = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \varphi$$

Richtung von $\vec{M}$ ist die Drehachsenrichtung

Def: Vektorprodukt

$\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren

$\vec{a} \neq \vec{b}$ $\vec{a}, \vec{b}$ nicht gleich $\vec{0}$

$$\varphi = \angle \vec{a}, \vec{b}$$

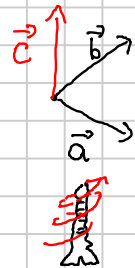
$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Vektorprodukt
Kreuzprodukt

ist ein Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften:

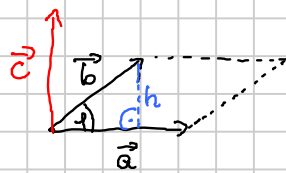
$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{c} \perp \vec{b}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein "Rechtsystem"



$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

Geom. Deutung



$$h = |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

Flächeninhalt des Parallelogramms

$$|\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{c}|$$

Vektorprodukt in der Koordinatenschreibweise

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Def: Orthogonale Vektoren

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m \text{ sind zueinander orthogonal} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Skalarprodukt "verschwindet"

Winkel zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos \frac{a_1 b_1 + \dots}{\sqrt{} \sqrt{}}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Länge des Vektors $\vec{a}$

$$\text{Allg: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

$$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n \quad i = 1, \dots, n$$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Komponente}$$

$$|\vec{e}_i| = 1$$

Matrizenrechnung

Def: Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \boxed{a_{ik}} & \dots & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ik} steht in der i -ten Zeile und der k -ten Spalte

$m \times n$ Matrix
 $\uparrow \quad \uparrow$
 Zeilenzahl Spaltenzahl

Merke: Zeile zuerst
 Spalte später

Der Spaltenvektor $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ ist auch als Matrix der Dimension $m \times 1$ aufzufassen

Der Zeilenvektor $B = (b_{11} \ b_{12} \ b_{13} \ \dots \ b_{1n})$ Matrix der Dimension $1 \times n$

Achtung: Immer auf die Bedeutung der Koeffizienten achten:

Zeilenüberschriften Spaltenüberschriften
 $\Downarrow$
 "Kopfzeile" "Kopfspalte"

Spezielle Matrizen

Quadratische Matrizen

$$A \text{ quadratisch} \Leftrightarrow m=n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale
"läuft" von links oben
nach rechts unten

Diagonalmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A ist quadratisch

$$a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

$$a_{ij} \neq 0 \text{ für } i=j$$

Einheitsmatrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

$$a_{ij} = 1 \text{ für } i=j$$

E ist aufzufassen als das Einselement der Matrizen

Die Transponierte einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

aus Zeilen wurden Spalten
aus Spalten wurden Zeilen

$$(A')' = A$$

Ist A eine Diagonalmatrix, so ist $A' = A$

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 7 \\ -2 & 3 & 8 \\ 11 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 11 & 4 & 5 \\ 10 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

5x3

3x5

Symmetrische Matrizen

Eine Matrix A heißt symmetrisch $\Leftrightarrow A = A'$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 10 \\ 6 & 1 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

quasi an der Hauptdiagonalen gespiegelt

A heißt schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow A' = -A$

Dreiecksmatrizen

Quadratische Matrizen, deren Koeffizienten ober- oder unterhalb der Hauptdiagonalen alle gleich Null sind, heißen Dreiecksmatrizen

Bp: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

untere Dreiecksmatrix

entsprechend : obere Dreiecksmatrix

Untermatrizen

Def. an einem Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -4 & 8 \\ 13 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 16 & 21 & 9 & 11 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4x5

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

Menge der Zeilennummern

$$I \subset M \text{ mit } I = \{2, 4\}$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Menge der Spaltennummern

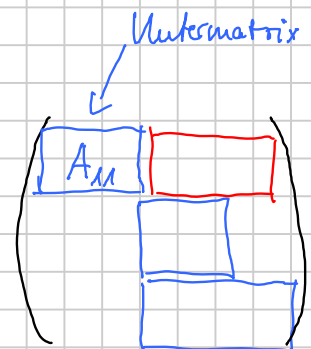
$$J \subset N \text{ mit } J = \{1, 5\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Untermatrix von A

Hinweis auf sehr große Matrizen

zum empfehlen hier : blockartige Aufteilung
entsprechen Untermatrizen



Rechnen mit Matrizen

Addition von Matrizen

Vor. A, B sind $m \times n$ Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, m$
 $j = 1, \dots, n$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Rechengesetze, die gelten:

$$A + B = B + A \quad \text{Kommutativgesetz}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{Assoziativgesetz}$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{Distributivgesetz}$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$A + 0 = A$$

$$A + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Es ex. zu A Matrix $-A$ mit $A + (-A) = \text{Nullmatrix}$

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

Multiplikation von Matrizen

Bp: 3 Autofirmen A, B, C produzieren Kleinwagen (K), Mittelklassewagen (M) und Oberklassewagen (O)

$$\begin{array}{c} K \quad M \quad O \\ A \quad \begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 500 \\ 1500 & 1000 & 600 \\ 700 & 1400 & 800 \end{pmatrix} \\ B \\ C \end{array}$$

3×3

Einnahmen pro Auto im jeweiligen Jahr

$$\begin{array}{c} 04 \quad 05 \quad 06 \quad 07 \\ K \quad \begin{pmatrix} 9900 & 10000 & 10500 & 11000 \\ 19000 & 19500 & 20000 & 21000 \\ 30000 & 31000 & 31500 & 33000 \end{pmatrix} \\ M \\ O \end{array}$$

3×4

Man interessiert sich für die Einnahmen der drei Firmen in den Jahren 04 - 07

in einer Tabelle ($\rightarrow$ Matrix)

in Millionen

$$A = \begin{pmatrix} 04 & 05 & 06 & 07 \\ 53.4 & 54.75 & 56.25 & 59 \\ 51.85 & 53.1 & 54.65 & 57.3 \\ 57.53 & 59.1 & 60.55 & 63.5 \end{pmatrix}$$

3 x 4



$$1000 \cdot 9900 + 1500 \cdot 19000 + 500 \cdot 30000 = 53,4 \text{ Millionen}$$

Skalarprodukt aus 1. Zeile x 1. Spalte
Matrix 1 Matrix 2

steht in der Ergebnismatrix in der
1. Zeile und der 1. Spalte

Matrizenmultiplikation allgemein

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(m x n)-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

(n x l)-Matrix

$$A \cdot B = C$$

(m x l)-Matrix

mit $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}$

$$c_{ij} = A_i \cdot B_j = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
i-te Zeile von A j-te Spalte von B

Merke: k ist der
Summationsindex

i, j "fest"

Frage: $A \cdot B = B \cdot A$?
gilt nicht!
Dimensionen

Übung zu Hause: $A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ Assoziativgesetz

Es gilt: $A \cdot E = A$

Bsp: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$
A · E

$A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ Distributivgesetz

$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$ $\lambda \in \mathbb{R}$