

Mathematik I - Vorlesung 19.12.18

Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{auf lineare Unabh. prüfen!}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2(-1) + \lambda_3(-2) = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 2 = 0$$

$$\lambda_1(-2) + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 1 = 0$$

$$-\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$$

$$-2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow$ lin. unabhängig

Matrizenmultiplikation - Vergleich zur Multiplikation in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$: $a^2 = a \Rightarrow a = 1$ oder $a = 0$
 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$bc = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ oder } c = 0$$

Matrizen: $A^2 = A$ obwohl $A \neq E$ oder $A \neq 0$

$$\text{Bsp: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer Matrix

$$\text{In } \mathbb{R}: a \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0) \quad \frac{1}{a} = a^{-1}$$

a^{-1} ist das inverse Element zu a

Def: (Inverse) A sei quadratische Matrix

B heißt die Inverse zu $A \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A = E$

Einheitsmatrix



A heißt regulär $\Leftrightarrow A$ besitzt eine Inverse

A heißt singular $\Leftrightarrow A$ besitzt keine Inverse

Bezeichnung:

$$A^{-1}$$

Satz: Jede reguläre Matrix besitzt genau eine Inverse

Beweis: Ann.: A ist regulär und besitze die Inversen B und C

$$\text{Dann gilt: } \underline{A \cdot C} = A \cdot B = B \cdot A = \underline{E}$$

$$\underline{B} = B \cdot E = B \cdot \underbrace{(A \cdot C)}_{=E} = \underbrace{(B \cdot A)}_{=E} \cdot C = E \cdot C = \underline{C}$$

$$\text{damit: } B = C$$

Berechnen einer Inversen einer 2×2 -Matrix

Zur Erinnerung

$$\text{in } \mathbb{R}: a \cdot x = 1$$

$$x = \frac{1}{a}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1$$

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0$$

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{12} = 0$$

$$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1$$

} Umformungen und Einsetzen ergeben

$$x_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_{11}$$

$\Downarrow$
 $\vdots$
 $\Downarrow$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{11} = a_{22}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{21} = -a_{21}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{12} = -a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{22} = a_{11}$$

$$\text{Man setzt } D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{Inverse von } A: A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ausblick:}} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante

Rechenregeln für Inverse:

A sei quadr. Matrix, A regulär

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(2) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad A^T \text{ ist die Transponierte}$$

$$(3) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(4) (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ökonomische Anwendung von Matrizen

Bp: Fa. Holzbaum KG prod. Wochenendhäuser vom Typ Alb, Rhön, Taunus

$$\begin{array}{c} \text{Alb} \\ \text{Rhön} \\ \text{Taunus} \end{array} \begin{pmatrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeitsinh.} \\ 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} =: M \quad \text{Materialbedarfsmatrix}$$

3 x 4

$$\text{Fa. Holzbaum erhält Auftrag } A := \begin{pmatrix} \text{Alb} & \text{Rhön} & \text{Taunus} \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

1 x 3

Frage: Materialbedarf für den Auftrag?

$$\begin{array}{cc} A & M \\ 1 \times 3 & 3 \times 4 \end{array} = (5 \ 6 \ 12) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 & 162 & 134 & 391 \end{pmatrix}$$

1 x 4

$$\text{Preise: } P := \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Stahl} \\ \text{Holz} \\ \text{Glas} \\ \text{Arbeit} \end{array}$$

4 x 1

$$\text{Herstellungskosten?} : \begin{pmatrix} 139 & 162 & 134 & 391 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} = 17122$$

1 x 4

4 x 1

Frage: Herstellungskosten für je einen Haustyp?

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692 \\ 885 \\ 696 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Alb} \\ \text{Rhön} \\ \text{Taunus} \end{array}$$

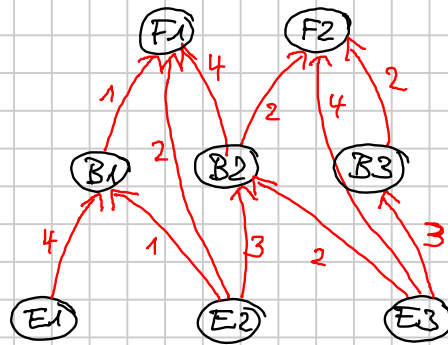
3 x 4

4 x 1

3 x 1

Technologische Matrix

Bp. Zweistufige Fertigung, die aus E1, E2, E3 (Einzerteile)
über B1, B2, B3 (Zwischenprodukte)
die Fertigungsteile F1, F2 (Endprodukte)
herstellt.



Gozinto graph
"the part that goes into"

Teilebedarfsmatrix

$$\begin{array}{c}
 F1 \quad F2 \\
 \begin{array}{c} F1 \\ F2 \\ B1 \\ B2 \\ B3 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 15 & 6 \\ 8 & 14 \end{array} \right) = T
 \end{array}$$

8x2

Bearbeitung und Montage läuft auf 5 Maschinen M1 - M5

Zeitbedarfsmatrix $Z =$

$$\begin{array}{c}
 F1 \quad F2 \quad B1 \quad B2 \quad B3 \quad E1 \quad E2 \quad E3 \\
 \begin{array}{c} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{array} \left(\begin{array}{ccccccccc} & & & & & 0,2 & 0,5 & \\ & & 0,1 & & & & & 0,4 & 0,6 \\ & & & 0,2 & & & & & \\ & & & & 0,2 & 0,6 & & & 0,1 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & & & 0,3 & & \\ & 0,7 & & 0,1 & 0,5 & & & & 0,1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

5x8

Belegungsmatrix der Maschinen A

$$A = Z \cdot T = \begin{array}{c} F1 \quad F2 \\ \begin{array}{c} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{array} \left(\begin{array}{cc} 8,4 & 3 \\ 11,6 & 11,2 \\ 3,2 & 1,8 \\ 6,9 & 2,7 \\ 1,2 & 3,3 \end{array} \right)$$

5x2

Auftrag C = $\begin{pmatrix} F1 & 100 \\ F2 & 50 \end{pmatrix}$

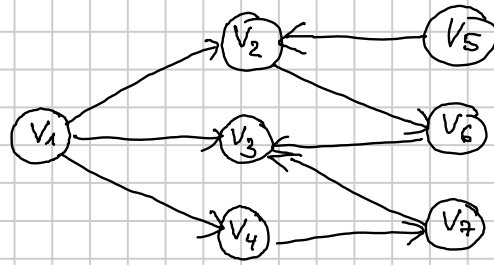
$$A \cdot C = \begin{array}{c} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{array} \left(\begin{array}{c} 990 \\ 1720 \\ 410 \\ 825 \\ 285 \end{array} \right)$$

5x2 2x1 5x1

Übersicht über die Belegungszeiten des Auftrag C

Netzwerkmatrizen

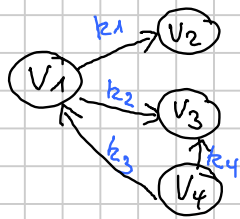
Bp:



Gerichteter Graph

Umwandlung eines Graphen in eine Matrix

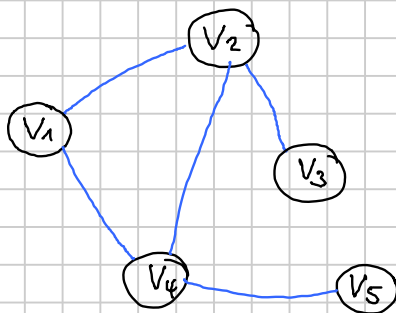
Inzidenzmatrix



$$\begin{matrix} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Inzidenzmatrix

gibt an, von wo ein Pfeil ausgeht (1), und wo er ankommt (-1)



$$\begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Adjazenzmatrix

Symmetrisch
Quadratisch

Rang einer Matrix : Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten

Bp: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(A)$

3. Zeile ist das Doppelte von der 1. Zeile

$$\text{rg}(A) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(E) = 4$$

Bem: Der Rang einer $(m \times n)$ -Matrix ist nie größer als die "kleinere Seite" $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$

A regulär $\Leftrightarrow A^{-1}$ ex.

A regulär $\Leftrightarrow A$ besitzt den vollen Rang

Rang einer Matrix berechnen:

durch erlaubte Umformungen kann eine Matrix A in eine Matrix B überführt werden, B hat Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Bp: $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \\ \cdot 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} + \text{Zeile 1} \rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 19 \\ \\ \cdot 2 \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} - \text{Zeile 2} \rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 0 & -93 \end{pmatrix} \begin{matrix} : -14 \\ : 38 \\ : -93 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{21}{14} & +\frac{1}{2} & & & \\ 0 & 1 & \frac{95}{38} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

Frohes Fest!