Vorlesung Mathematik 9.1.2019

Hinweis: Help Desk (HDM) offener Lernraum
jeden Mi u. Do 15-16.30 Uhr
2.103

Überblick über das bislang Besprochene

↓

Rang einer Matrix A : rg(A)

Bp:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1.\text{Zeile} \cdot 7 \\ 3.\text{Zeile} \cdot 2 \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3.\text{Zeile} + 1.\text{Zeile} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2.\text{Zeile} \cdot 19 \\ 3.\text{Zeile} \cdot 2 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 3.\text{Zeile} - 2.\text{Zeile} \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 0 & -93 \end{pmatrix} \begin{array}{l} :-14 \\ :38 \\ :-93 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = 3$$

Lineare Gleichungssysteme

Sehr viele Zusammenhänge in der Mathematik bzw. in ökon. Anwendungen sind linear (oft mehrere 1000 Gleichungen mit mehreren 1000 Unbekannten)

Def: Lineare Gleichung
Alle Variablen ausschließlich in der 1. Potenz und nicht miteinander multipliziert, nur in der folgenden Form:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b_i$$

a_i Koeffizienten x_i Variablen b_i Absolutglied
$i = 1, \dots, n$

Variablen $x_1, \dots, x_n$ können zu einem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden

Def: (lineares Gleichungssystem "LGS")

m Gleichungen n Variablen

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\vec{x}} = \underset{m \times 1}{\vec{b}}$$

LGS lässt sich als "Matrizengleichung (Multiplikation)" darstellen

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

Schreiben Sie das zugehörige LGS auf.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 \qquad + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Bp:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 20x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 2x_1 - 5x_2 + \tfrac{1}{2} x_3 &= -20 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \\ 2 & -5 & 1/2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Def. (homogenes LGS)

LGS heißt homogen $\Leftrightarrow$ $\vec{b} = \vec{0}$

Lösung LGS – Grundlagen

1) $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_1$

Fall: $n=1$ $\quad a_1x_1 = b_1 \quad a_1 \neq 0 \Rightarrow$ es ex. genau eine Lösung

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1}$$

Fall: $n=2$ $\quad a_1x_1 + a_2x_2 = b_1 \quad a_1, a_2 \neq 0$

Wähle für eine Variable den Parameter t z.B. $x_1 = t$

$$a_1 \cdot t + a_2x_2 = b_1 \Rightarrow x_2 = \frac{b_1 - a_1 \cdot t}{a_2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{b_1}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} \cdot t$$

Die unendlich vielen Lösungen liegen auf einer $\boxed{\text{Geraden}}$ im $\mathbb{R}^2$

Fall: $n=3$ $\quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1$

Die unendlich vielen Lösungen liegen auf einer $\boxed{\text{Ebene}}$ im $\mathbb{R}^3$

$n > 3$ "Hyperebenen" (nicht mehr vorstellbar)

Freiheitsgrad : jede Gleichung "bindet" einen Freiheitsgrad

Bsp: 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten: Lösungen liegen auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen

Fazit: Um eine eindeutige Lösung eines LGS mit n Variablen zu erhalten, benötigt man mindestens n Gleichungen

Def: m Gleichungen n Unbekannte

LGS exakt bestimmt $\Leftrightarrow m = n$

LGS hat eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ die Gleichungen sind lin. unabh.

LGS überbestimmt $\Leftrightarrow m > n$

LGS unterbestimmt $\Leftrightarrow m < n$

Äquivalente Umformungen bei LGS sind:

- Vertauschen von Zeilen bzw. Spalten

— Addition / Subtraktion von Zeilen

— Addition / Subtraktion eines Vielfachen von Zeilen

„Gleichungen in einem LGS lassen sich linear kombinieren", die Lösungsmenge verändert sich dadurch nicht!

Diese erlaubten äquiv. Umformungen bilden die Grundlage des Gauß'schen Lösungsalgorithmus (Carl Friedrich Gauß 1777–1855)
(Gauß'sche Eliminationsverfahren)

Bp: Übergang erweiterte Koeffizientenmatrix

Ziel: Zeilenstufenform

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\
-2 & 6 & -2 & -2 & 16
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ +1.\text{Zeile} \\ +3\times 1.\text{Zeile} \\ -2\times 1.\text{Zeile}
\end{array}
$$

Pivotelement

Auswahl einer Zeile (Pivotzeile) und einer Spalte (Pivotspalte) (im Bp. 1. Zeile / 1. Spalte)

[Im Verlauf des Gauß Alg. wird jede Zeile und jede Spalte genau einmal ausgewählt.]

1. Elimination

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\
0 & -2 & 2 & 5 & 4 \\
0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\
0 & 10 & -4 & -8 & 14
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ -2\times 2.\text{Zeile} \\ +5\times 2.\text{Zeile}
\end{array}
$$

Pivotelement

2. Elimination

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\
0 & -2 & 2 & 5 & 4 \\
0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\
0 & 0 & 6 & 17 & 34
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ -2\times 3.\text{Zeile}
\end{array}
$$

Pivotelement

3. Elimination

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\
0 & -2 & 2 & 5 & 4 \\
0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 21 & 42
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Rücksubstitution

aus Zeile 4: $21x_4 = 42 \Rightarrow x_4 = \frac{42}{21} = 2 \Rightarrow \boxed{x_4 = 2}$

mit $x_4 = 2$ folgt aus Zeile 3: $3x_3 - 2\cdot 2 = -4 \Rightarrow 3x_3 - 4 = -4 \Rightarrow 3x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$

mit $x_4 = 2$ und $x_3 = 0$ folgt aus Zeile 2: $-2x_2 + 2\cdot 0 + 5\cdot 2 = 4 \Rightarrow -2x_2 + 10 = 4 \Rightarrow -2x_2 = -6 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3}$

mit $x_4 = 2, x_3 = 0, x_2 = 3$ folgt aus Zeile 1: $-x_1 - 2\cdot 3 + 1\cdot 0 + 3\cdot 2 = 1 \Rightarrow -x_1 - 6 + 6 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = -1}$

Die Lösungen lauten: $x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$

Gauß'scher LA: Jede Zeile, jede Spalte wird einmal ausgewählt

$\rightarrow \quad \rightarrow$ Treppenstufenform

$\Longrightarrow$ Rücksubstitution

Wann besitzt ein GS eine eindeutige Lösung?

Kevin kauft 2 Brote und 10 Brötchen und zahlt 12.20 €

1 Woche später 3 Brote und 15 Brötchen und zahlt 18.30 €

$$2p_1 + 10p_2 = 12.20$$
$$3p_1 + 15p_2 = 18.30$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 10 & 12{,}2 \\ 3 & 15 & 18{,}3 \end{array}\right) : 2 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6.1 \\ 3 & 15 & 18{,}3 \end{array}\right) -3\times 1. \text{Zeile}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lineare Abhängigkeit

2. Zeile liefert keine neue Information

Dieses GS besitzt keine eindeutige Lösung

LGS ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A, b) = m$

mit m Gleichungen

Zusammenfassung: Lösbarkeit von GS

Geg. LGS mit m Gleichungen und n Variablen

NB: Frage

Was ist, wenn nachdem Gauß LA folgendes vorliegt?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Widersprüchl. GS

$m < n$ GS unterbestimmt, ∞ viele Lösungen

linear abh. Gleichungen können eliminiert werden

$m = n$ GS ist exakt bestimmt

Gl. alle lin. unabh., es ex. eine eindeutige Lösung

Falls lin. abh. Gl. eliminiert werden können, dann GS unterbestimmt

$m > n$ GS ist überbestimmt

Mindestens $m-n$ Gl. sind lin. abh. und können weggelassen werden.

Das zeigt sich alles im Verlaufe des Gauß'schen LA!