Vorlesung Mathematik

16.1.2019

Übung H. Giannakopoulos heute nicht.
Bitte zu Übung H. Wagner gehen, findet heute in 3.101 statt

alternativ: 15-17 Uhr bei Frau Bagheri 3.102

Unbekannte:
A: Barschaft des 1. Reis.
B: " " 2. Reis.
C: " " 3. Reis.

Historische Aufgabe:

$$73 + A + B = 2(A+C+B+C)$$
$$73 + A + C = 3(B+C+A+B)$$
$$73 + B + C = 4(A+B+A+C)$$

$$\text{I} \quad 73 + A + B = 2A + 2C + 2B + 2C$$
$$\text{II} \quad 73 + A + C = 3B + 3C + 3A + 3B$$
$$\text{III} \quad 73 + B + C = 4A + 4B + 4A + 4C$$

Umformen in die "normale" Ansicht eines LGS

$$\text{I} \quad 73 = A + B + 4C$$
$$\text{II} \quad 73 = 2A + 6B + 2C$$
$$\text{III} \quad 73 = 8A + 3B + 3C$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\times\text{I} \\ -8\times\text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 4 & -6 & -73 \\ 0 & -5 & -29 & -511 \end{array}\right) + 1.25 \times II \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 4 & -6 & -73 \\ 0 & 0 & -36.5 & -602.25 \end{array}\right)$$

$$-36.5 \cdot C = -602.25$$
$$C = 16.5$$

$$4 \cdot B - 6 \cdot 16.5 = -73$$
$$B = 6.5$$

$$A + 6.5 + 4 \cdot 16.5 = 73$$
$$A = 0.5$$

Lineare GS und Inverse der Koeffizienten-Matrix

Zur Erinnerung A^{-1} heißt Inverse $\Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix nur für quadratische, reguläre Matrizen

Falls A quadratisch und regulär, dann besitzt das LGS eine eindeutige Lösung

$$x_1 = b_1^*$$
$$x_2 = b_2^*$$
$$\vdots$$
$$x_m = b_m^*$$

Lösung als Matrizengleichung : $E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$ (*)

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} E \cdot \vec{x} &= A^{-1} \vec{b} \\ \text{und es ist (*)} \quad E \cdot \vec{x} &= \vec{b}^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{b}^*$$

Berechnen der Inversen :

$$A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j$$

A quadratisch

$$\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \text{jten Komponente}$$

Sei A^{-1} bekannt :

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \underbrace{A^{-1} \cdot \vec{e}_j}_{\text{j-te Spalte der Inversen}}$$

Vorgehen zur Berechnung der Inversen ist also :

Anwendung des Gauß'schen LA simultan auf

$$A \cdot X = E$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}}_{A} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Umformen in Einheitsmatrix

$\downarrow$

E

diese Umformungen werden simultan auf E angewendet

$\downarrow$

A^{-1}

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Gesucht: A^{-1}

$$\begin{array}{c} A \\ \begin{array}{r} \\ \\ -2\times 1.\text{Zeile} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} E \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2\times 1.\text{Zeile} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ :2 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2\times 2.\text{Zeile} \\ \\ +3\times 2.\text{Zeile} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\times 2.\text{Zeile} \\ \\ +3\times 2.\text{Zeile} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ -3.\text{Zeile} \\ \cdot 2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3.\text{Zeile} \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E $\quad$ A^{-1}

Bitte überprüfen: $A \cdot A^{-1} = E$

$A^{-1} \cdot A = E$

Fazit:

Ein LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten hat genau eine eindeutige Lösung, wenn $rg(A) = n$

wenn A regulär

wenn A besitzt Inverse

Determinanten

Erinnerung: Inversenberechnung einer (2×2)-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante

D ist $\boxed{\text{eine einzige reelle Zahl}}$, aus den Koeffizienten der Matrix gebildet

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$n \times n$-Matrix

Determinante von A

"Kennzahl"

Die Determinante einer

(1×1) - Matrix $\quad (a_{11}) \quad \det A = a_{11}$

1-reihige Determinante

(2×2) - Matrix $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2-reihige Determinante

(3×3) - Matrix $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = \left.\begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} \\ + a_{12}a_{23}a_{31} \\ + a_{13}a_{21}a_{32} \end{array}\right\} + \quad \left.\begin{array}{l} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}\right\} -$$

3-reihige Determinante

Regel von Sarrus (zur Berechnung einer 3-reihigen Determinante)

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + \; - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

"Produkte der Hauptdiagonalen"

− "Produkte der Nebendiagonalen"

Die Determinante einer Matrix n-ter Ordnung

Bem.: 3-reihige Determinante 6 Summanden à
(3!) 3 Faktoren

4-reihige Determinante 24 Summanden à
(4!) 4 Faktoren

5-reihige Determinante 120 Summanden à
(5!) 5 Faktoren

Def: $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \det A$

$$\det A = \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{\underline{1}j_1} a_{\underline{2}j_2} \cdots a_{\underline{m}j_m}$$

$P(j)$: Permutationen des Spaltenindex (Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten des Spaltenindex)

$I(j)$: Zahl der Inversionen der jeweiligen Permutation
bestimmt das Vorzeichen des jeweiligen Summanden

Eigenschaften von Determinanten

1) Vertauschen zweier benachbarter Zeilen ändert das Vorzeichen

2) Vertauscht man beliebig viele Zeilen, so ändert sich ggf. das Vorzeichen

3) Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^m \cdot \det A$$

$A = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}$

$\det A = 2 \cdot 2 \cdot a_{11} a_{22} - 2 \cdot 2 a_{12} a_{21}$
$= 2^2 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$

4) Addition zweier Determinanten, die sich in nur einer Zeile unterscheiden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}^* & a_{22}+a_{22}^* & a_{23}+a_{23}^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5) Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Determinante nicht.

Wird klar am Bp:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} \end{vmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad a_{11}\cdot(a_{22}+\lambda a_{12}) - a_{12}(a_{21}+\lambda a_{11})$$

$$= a_{11}a_{22} + \lambda a_{11}a_{12}$$

$$- a_{12}a_{21} - \lambda a_{11}a_{12}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

6) Sind Zeilen linear abhängig, dann ist $\det A = 0$

(Erklärung: lin. abh. Zeilen "erzeugen" bei äquiv. Umformung Zeilen, die nur aus Nullen bestehen)

7) $\det A = \det A'$

Einfacher Methoden zur Berechnung von höher-reihigen Determinanten

Grundlagen:

Begriffseinführung : Adjunkte und adjungierte Matrix

Erinnerung : Untermatrizen entstehen durch Streichen von Zeilen und Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Def : Die Unterdeterminante $(n-1)$ter Ordnung