Vorlesung Mathematik

23. 1. 2019

Determinanten

Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + \quad - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Def: Die Unterdeterminante (m-1)ter Ordnung zum Element a_{ij} (Streichung i-te Zeile, j-te Spalte) heißt MINOR

j-te Spalte gestrichen

$$|A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj-1} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

i-te Zeile gestrichen

Wieviele Minoren besitzt eine Determinante m-ter Ordnung?

Antwort: m^2 Minoren

Bp: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A|_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad |A|_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A|_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A|_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A|_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A|_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6 \qquad |A|_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \qquad |A|_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 18$$

Def: Die Adjunkte zum Element a_{ij} ist

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A|_{ij}$$

Hilfe: Vorzeichenmuster

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & & & \\ + & - & + & & & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

z.B. 2. Zeile 2. Spalte

$(-1)^{2+2} = -1^4$
$= 1$
$+$

Fasst man sämtliche Adjunkten zu einer Matrix A zusammen, so erhält man die adjungierte Matrix A_{ad} von A

Bp: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Minoren s.o.

$$A_{ad} = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-3} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-3} \\ +6 & --5 & +18 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung von höherreihigen Determinanten (>3) verwendet man das eben Eingeführte im $\boxed{\text{Entwicklungssatz von Laplace}}$

Entwicklung nach der i-ten Zeile $\qquad$ A $m \times m$-Matrix

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A|_{ij}$$

Entwicklung nach der j-ten Spalte

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A|_{ij}$$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Memo (Entw. 1. Zeile $i=1$)

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \, |A|_{1j}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 + 0 = 12$$

zu Hause vergleichen: Entwicklung nach einer anderen Zeile / Spalte

Zur Erleichterung sehr wichtig: erst Umformen, um möglichst viele Nullen in einer Zeile oder Spalte zu haben

Bp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5x5 Matrix

$|A|$: Entwicklung nach der 4. Zeile : $1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Entw. nach der 1. Zeile : $1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

⇓ 3. Spalte ⇓ 3. Zeile

$-1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$-1 \cdot 1 \quad + \quad 1$

$= -1 + 1 = 0$

Determinante einer Dreiecksmatrix

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ 0 & & & \ddots \; a_{mm} \end{vmatrix} \underset{\text{Entwicklung nach 1. Spalte}}{\overset{\uparrow}{=}} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. 1. Spalte}}{\overset{\uparrow}{=}} \cdots\cdots$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{mm}$$

Mittel der Wahl : die Determinante erst auf Dreiecksform bringen

Triangulieren (Umformungen, die die Determinante verändern, berücksichtigen)

Determinanten und Inverse Matrix :

A regulär $\iff \det A \neq 0$ $\quad$ A besitzt Inverse

A regulär $\iff A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A_{ad}$

Integralrechnung

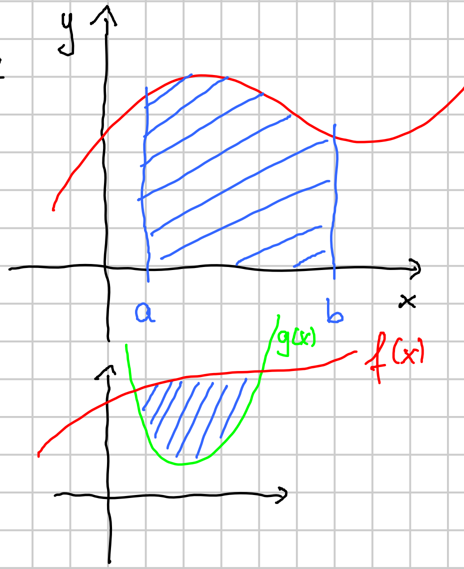
Differentialrechnung: $y = f(x) \longrightarrow y' = f'(x)$

$y' = f'(x) \xrightarrow{?} y = f(x)$

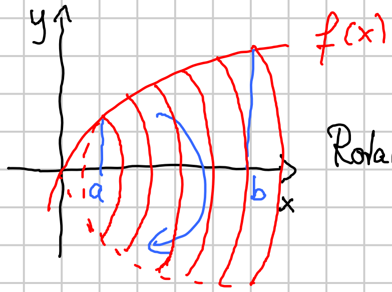
Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung

"Aufleiten" $\Longrightarrow$ Das unbestimmte Integral

In der Schule



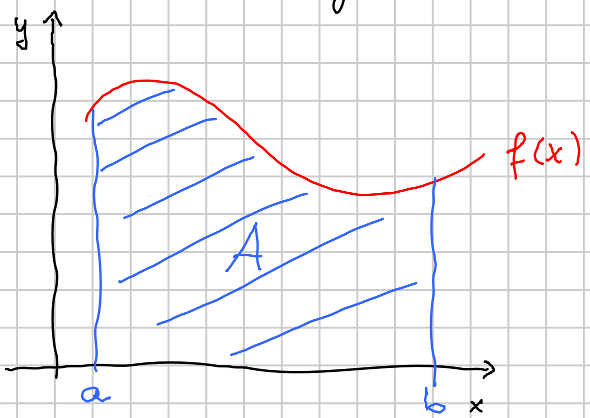
Flächenberechnung $\Longrightarrow$ Das bestimmte Integral



Rotationsvolumen

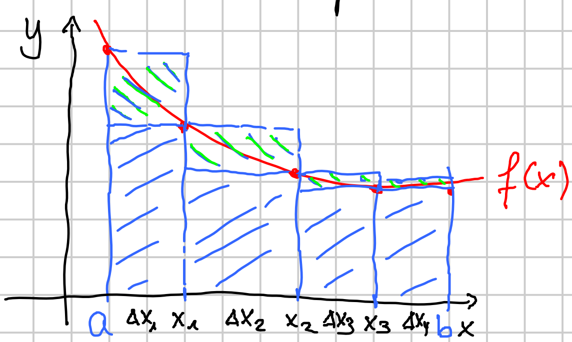
Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral findet man im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (→ später)

Das bestimmte Integral



Vorgehen:

Annäherung durch Summe von Rechtecksflächen



Vorgehen: Zerlegen des Intervalls $[a,b]$ in (nicht notwendig gleiche) Teilintervalle

$$\Delta x_1 = x_1 - a$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1$$
$$\Delta x_3 = x_3 - x_2$$
$$\Delta x_4 = b - x_3$$

Untersumme : Summe aller Rechtecksflächen mit Höhe = kleinster Funktionswert auf dem Teilintervall

Obersumme : Summe aller Rechtecksflächen mit Höhe = größter Funktionswert auf dem Teilintervall

Werden die Rechtecke "immer dünner" (Δx (Länge der Rechtecke) $\to 0$)

so streben Ober- und Untersumme gegen einen Wert:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(x_k) \cdot \Delta x_k}_{\text{unendlich dünnes Rechteck}}$$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)\, dx}_{\text{im Prinzip auch ein Rechteck}}$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ heißt das bestimmte Integral von $f(x)$ in den Grenzen a bis b

x Integrationsvariable

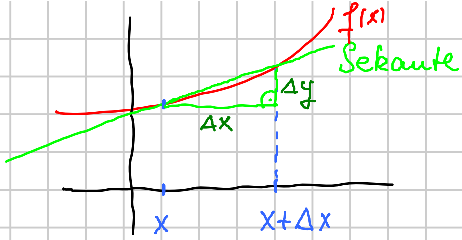
$f(x)$ zu integrierende Funktion, Integrand

a untere } Integrationsgrenze
b obere }

dx Differential der Variablen x (unendlich kleine Differenz)

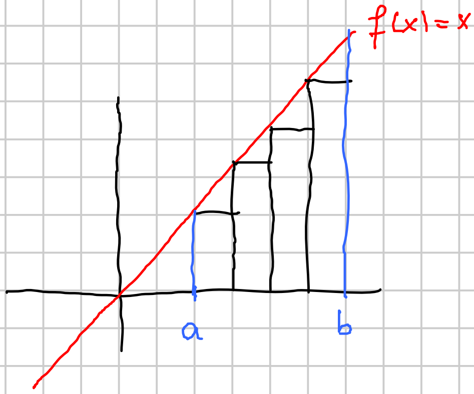
Zur Erinnerung

$$y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$ Differentialquotient



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Bp: $f(x) = x$



$$\int_a^b x \cdot dx$$

Ziel: $\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Wähle $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ $\quad$ $[a,b]$ wird in n gleiche Teile geteilt

Zerlegungspunkte: $a + k \cdot \Delta x$ $\quad$ $k = 0, 1, 2, \ldots n$

Wähle Untersumme:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x$$

$\downarrow$ da $f(x) = x$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\underbrace{a + (k-1)\cdot \Delta x}_{= x_{k-1}}] \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x + (k-1) \cdot \Delta x^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a \cdot \Delta x + \sum_{k=1}^{n} (k-1) \cdot \Delta x^2 \right)$$

Verschieben des Summationsindex

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1) \right)$$

Memo

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\Delta x \left(n \cdot a + \Delta x \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \right)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \left(n \cdot a + \frac{b-a}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(b-a \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right) \right)$$

$\to 1$ für $n \to \infty$

$$= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right)$$

$$= \text{------} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Wir brauchen andere Regeln zum vereinfachten Rechnen!

$$\int x \, dx \overset{\text{aufleiten}}{=} \frac{x^2}{2} \quad \left(+\underset{C \in \mathbb{R}}{C} \rightarrow \text{später}\right)$$

Aus bekannten Ableitungen kann man "die Aufleitung" bestimmen

$$f(x) = x^n \longrightarrow \overset{\text{Aufleitung}}{\frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

$$f(x) = e^x \longrightarrow e^x$$

$$f(x) = \cos(x) \rightarrow \sin(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \ln|x|$$

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow -\cos(x)$$