Vorlesung Mathematik
30.1.2019
(die letzte im WS 2018/19)

1. Klausurtermin : 26.3.19

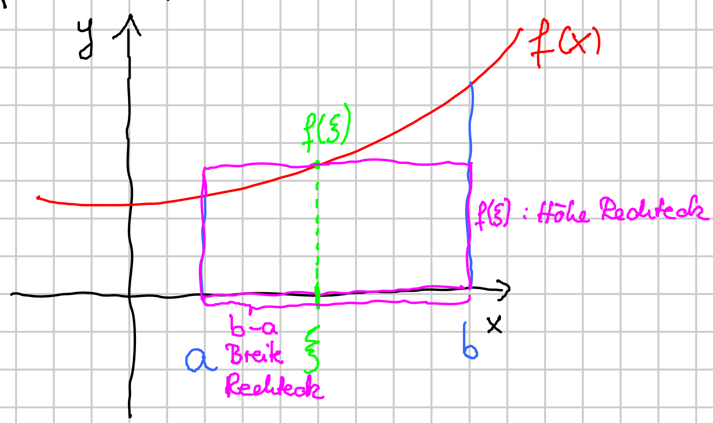
Integralrechnung

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2-a^2}{2} \qquad f(x)=x$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

$f(\xi)$ heißt der Mittelwert der Funktion f auf $[a,b]$



Interpretation : Die Fläche unter der Kurve $f(x)$ auf $[a,b]$ kann durch ein flächengleiches Rechteck ersetzt werden!

Das unbestimmte Integral

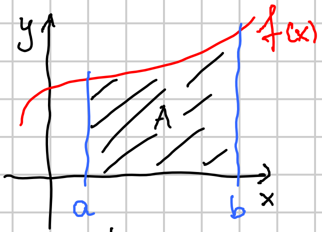
Def : geg. $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

$$(F(x)+C)' = f(x) \qquad \text{Konstante } C \text{ fällt weg}$$

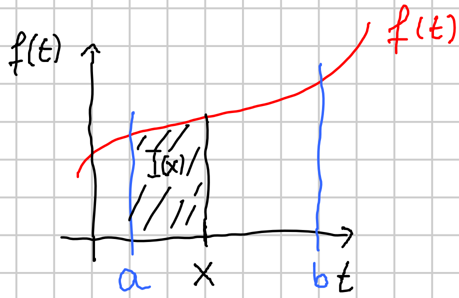
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

Zusammenhang zwischen dem unbestimmten und bestimmten Integral: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

bestimmte Integral

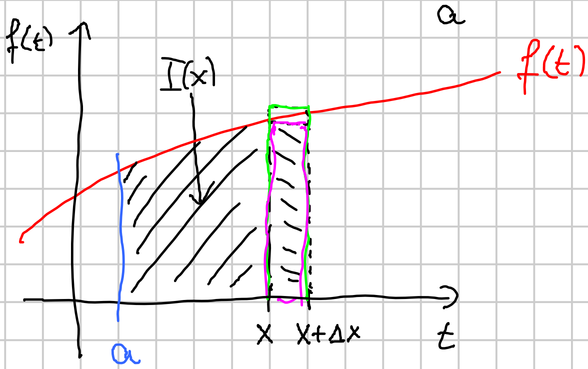


$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$$I : x \longmapsto I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Geg: $$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



$$\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x)$$

Zuwachs liegt zwischen $\Delta x \cdot f(x+\Delta x)$ $\boxed{\text{obere Rechteck}}$

und $\Delta x \cdot f(x)$ $\boxed{\text{untere Rechteck}}$

Es gilt:

$$f(x)\cdot\Delta x \leq \Delta I \leq f(x+\Delta x)\cdot\Delta x \quad \Big| : \Delta x$$

$$f(x) \leq \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq f(x+\Delta x)$$

Grenzübergang $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x) \leq I'(x) \leq f(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) = I'(x)$$

Aussage: Die erste Ableitung eines unbestimmten Integrals ist der Integrand

Differenzieren und Integrieren sind "Umkehroperationen"

Folgerung: $\int_a^b f(t)\,dt$ $\quad I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$I(x) = F(x) + C$$

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Setze $x = b$:

$$I(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Bp: $\int_1^2 x^2\,dx$ $\quad f(x) = x^2 \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3$$

$$F(2) - F(1)$$

$$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b \qquad f(x) = x \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$F(b) - F(a)$$

Auffinden von Stammfunktionen

Bei "einfacheren" Funktionen aus der Kenntnis der Ableitungen

z.B. $f(x) = \sin(x) \rightarrow F(x) = -\cos(x) + C$

$f(x) = \cos(x) \rightarrow F(x) = \sin(x) + C$

$f(x) = e^x \rightarrow F(x) = e^x + C$

$f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

etc.

Integration von "komplizierteren" Funktionen

Produktintegration – partielle Integration

Herleitung:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \quad \Big| -f'(x)\cdot g(x)$$

$$f(x)\cdot g'(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - f'(x)\cdot g(x)$$

Integration auf beiden Seiten

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int \left(f(x)\cdot g(x)\right)'\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Partielle Integration (weil ein Integral "übrig" bleibt)

Produktintegration (weil ein Produkt von zwei Fkt. zu integrieren ist)

Bp: $\int x\cdot e^x\,dx$ $\qquad f(x)=x \quad f'(x)=1$

$\qquad g'(x)=e^x \quad g(x)=e^x$

$$= x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x = e^x(x-1) + C$$

$\int x\cdot \sin(x)\,dx$ $\qquad f(x)=x \quad f'(x)=1$

$\qquad g'(x)=\sin(x) \quad g(x)=-\cos(x)$

$$= -x\cdot\cos(x) - \int 1\cdot -\cos(x)\,dx = -x\cdot\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + C$$

Bp: $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx$ $\qquad f(x)=\sin(x) \quad f'(x)=\cos(x)$

$\qquad g'(x)=\cos(x) \quad g(x)=\sin(x)$

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \sin(x)\cdot\sin(x) - \int \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx \quad \Big| + \int \cos x\cdot \sin x\,dx$$

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

Bp: $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$ $\qquad f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$\qquad g'(x) = 1 \qquad g(x) = x$

$$\int 1 \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x \qquad = x(\ln x - 1) + C$$

Merke: Funktionen geschickt wählen

manchmal muss das partielle Integral nochmals partiell integriert werden!

Integration durch Substitution

Erinnerung Kettenregel $\quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $\qquad$ Bp: $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

Bp: $\int \sqrt{x^2+2} \cdot \underline{2x \, dx}$

$z = x^2 + 2 \qquad z' = \frac{dz}{dx} = 2x \qquad \Rightarrow dz = \underline{2x\,dx}$

$$\int \underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{z} \; \underbrace{2x\,dx}_{dz} = \int \sqrt{z}\,dz = \int z^{\frac{1}{2}}\,dz$$

NR: $\dfrac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + C$$

Rücksubstitution: $\frac{2}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}} + C$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} + C$$

Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz \qquad z = g(x)$$

"Umkehrung" der Kettenregel in der Differentialrechnung

Bp: $\int \frac{1}{2x+3}\,dx$ $\qquad z = 2x+3$

$z' = \frac{dz}{dx} = 2 \qquad dz = 2\,dx \qquad dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz$

$= \frac{1}{2}\ln|z| + C$

Bp: $\int x\cdot e^{-x^2}\,dx$ $\qquad z = -x^2 \qquad \frac{dz}{dx} = -2x \qquad dz = -2x\,dx$

$dx = \frac{dz}{-2x}$

$\int e^z \cdot \underbrace{x\,dx}$

Ziel: $-2x\,dx = dz$

$= -\frac{1}{2}\int e^z\,dz$ $\qquad F(x) = -\frac{1}{2}e^z + C$

$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

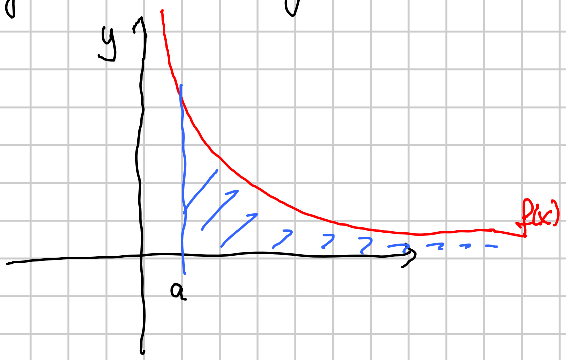
Bp: $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ $\qquad z = 1+\sin^2 x$

$\frac{dz}{dx} = 2\sin x\cdot\cos x \qquad dz = 2\sin x\cdot\cos x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz$ $\qquad F(z) = \frac{1}{2}\ln|z| + C$

Rücks. $F(x) = \frac{1}{2}\ln|1+\sin^2 x| + C$

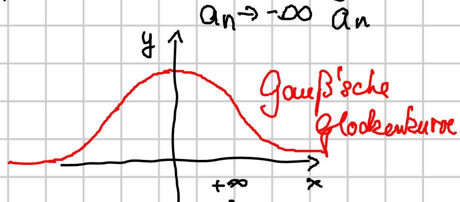
Uneigentliche Integrale



$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b_n\to\infty}\int_a^{b_n} f(x)\,dx$$

Entsprechend $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a_n\to-\infty}\int_{a_n}^{b} f(x)\,dx$

oder $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$



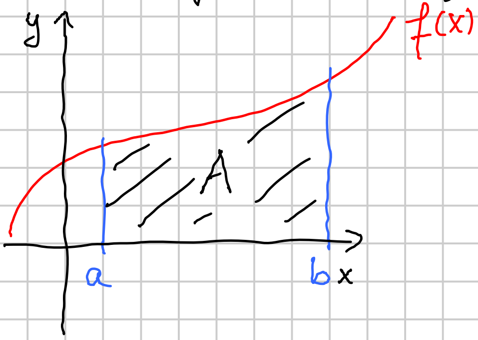
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Bp: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ $\qquad \displaystyle\int_1^{b_n} x^{-4}\,dx = \lim_{b_n\to\infty}\left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^{b_n}$

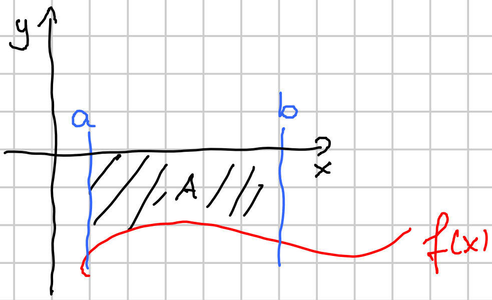
$$\lim_{b_n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{b_n^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1^3}\right)$$

$$=\lim_{b_n\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{3b_n^3}}_{\to 0}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

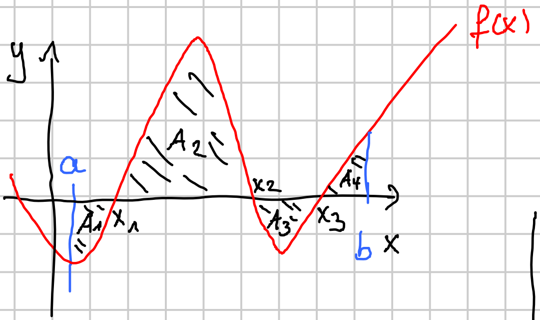
Anwendungen der Integralrechnung



$f(x)\geq 0$ auf $[a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ entspricht dem Flächeninhalt A



$f(x)\leq 0$ auf $[a,b]$: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = A$

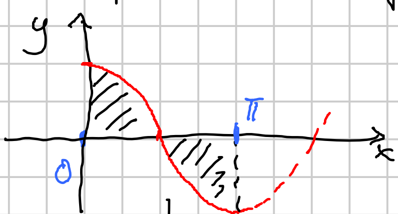


Nullstellen von $f(x)$ ermitteln

$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{x_3}^{b} f(x)\,dx\right|$$

Bp: Fläche, die vom Graphen von $f(x)=\cos x$ auf $[0,\pi]$ eingeschlossen wird

$$\int_0^\pi \cos x\,dx$$



$$A=\left|\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right|+\left|\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx\right|$$

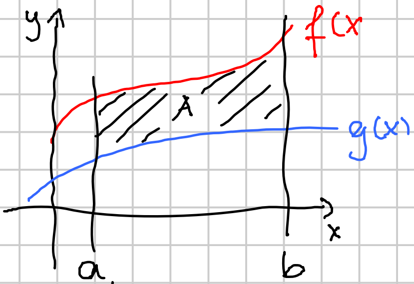
$$= \left|\left[\sin x\right]_0^{\pi/2}\right| + \left|\left[\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi}\right|$$

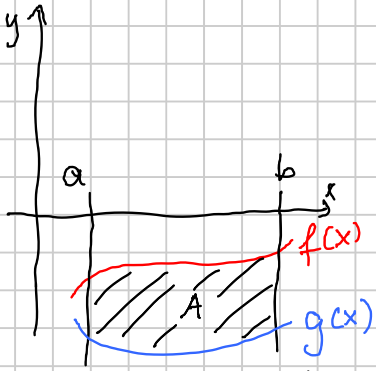
$$= \left|\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0\right| + \left|\sin \pi - \sin\tfrac{\pi}{2}\right|$$

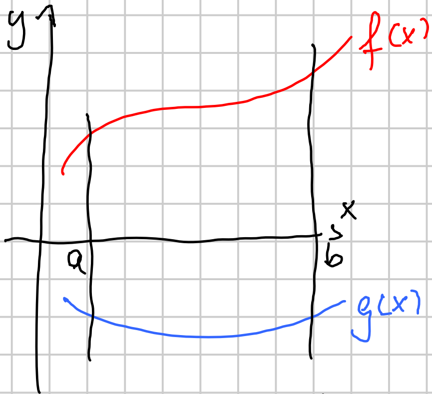
$$= \left|1 - 0\right| + \left|0 - 1\right|$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven



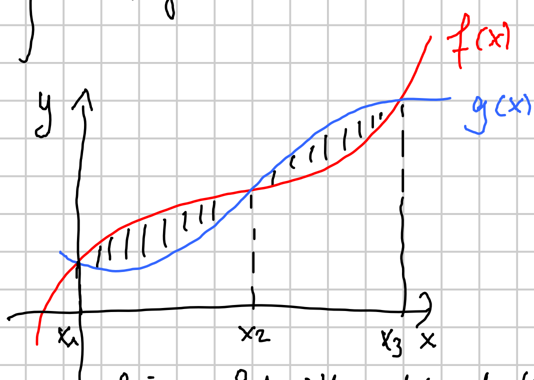




$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

$f(x) \geq g(x)$ auf $[a,b]$ → gilt auch hier!

und auch hier!

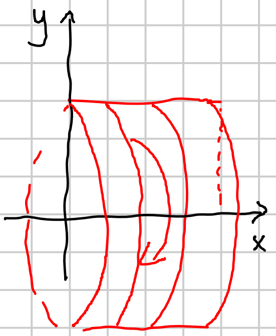


hier: Schnittpunkte der Kurven berücksichtigen

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x)\right] dx + \int_{x_2}^{x_3} \left[g(x) - f(x)\right] dx$$

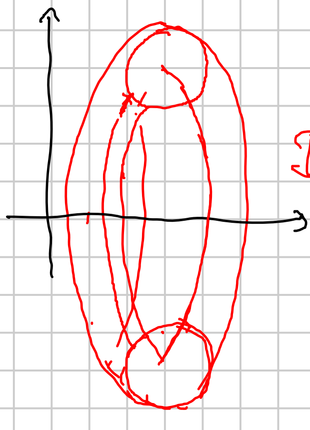
Rotationsvolumen (Drehung um die x-Achse)

Bsp.

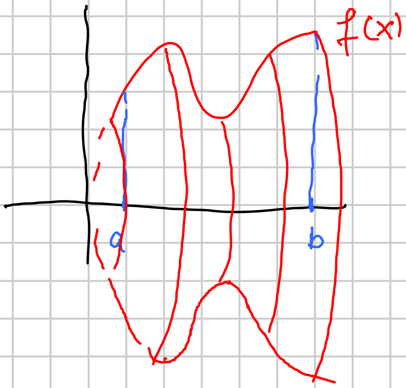


Rechteck → Zylinder

Halbkreis → Kugel

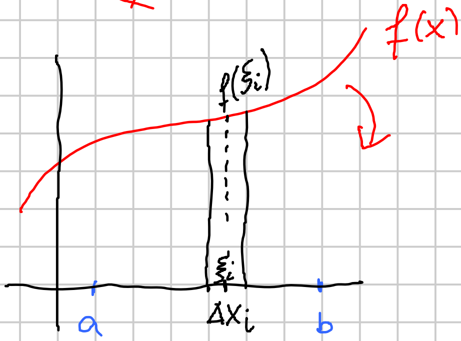


Donut



Ziel: Volumenberechnung dieses Rotationskörpers

Herleitung:



Teilrechteck rotiere um die x-Achse: Zylinderscheibe

mit Volumen $\Delta V_i = \pi \cdot f(\xi_i)^2 \Delta x_i$

$[V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h]$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

$\Downarrow$ $n \to \infty$ $\Delta x_i \to 0$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$