

Orga Sprechstundenverlegung

6.11. $\rightarrow$ 7.11., $10^{00} - 10^{45}$

27.11. $\rightarrow$ 28.11., " - "

HIP-Woche: 18.-22.11.: keine V, Ü, Tut,

Praktikumsplan: die Listen von Einf P sind noch
NICHT übertragen $\rightarrow$ dauert noch

Bsp. Folgen

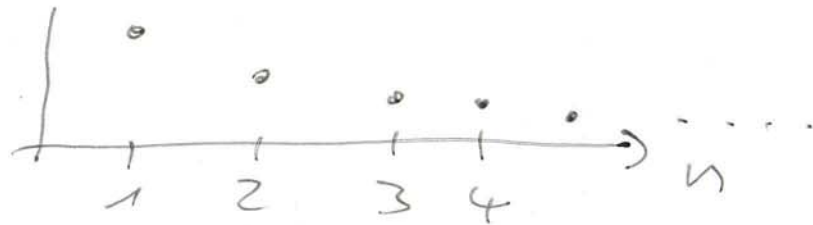
$$a_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$$

$$(a_n) = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

streng monoton fallend

n.o.b.: z.B. $U = 1$

n.u.b.: z.B. $L = 0$



2

2) $a_n = (-1)^n$ (alternierende Folge)

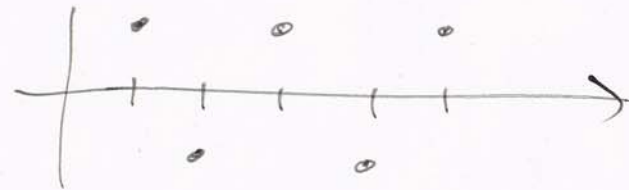
$(a_n) = 1, -1, 1, -1, \dots$

monoton? — Nein

n.o.b. $K = 1$

n.u.b. $L = -1$

} beschränkt



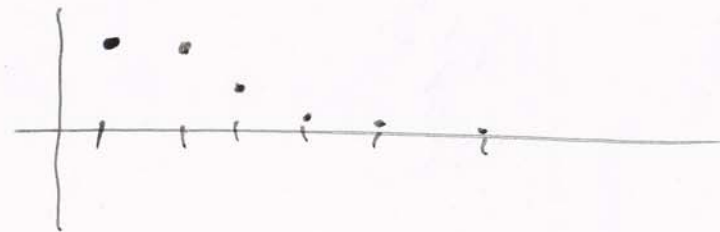
3) $a_n = \frac{n}{2^n}$

$(a_n) = \frac{1}{2}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots$

monoton fallend

n.o.b. $K = 1$

n.u.b. $L = 0$

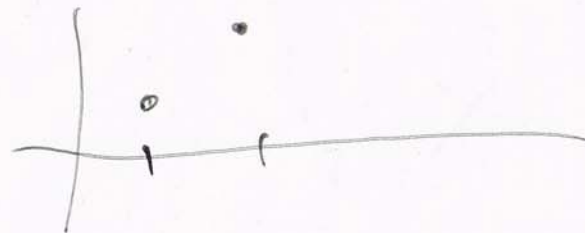


4) $a_n = n$

$(a_n) = 1, 2, 3, \dots$

streng monoton wachsend

n.u.b. $L = 0$, nach oben unbeschränkt



Bsp. zu Grenzwert ($n \rightarrow \infty$)

3

1) $a_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

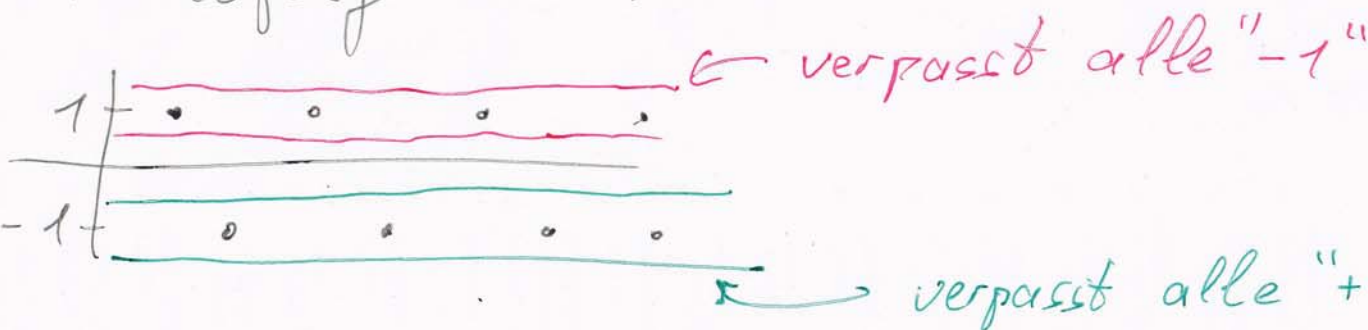
$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

"Nullfolge"

2) $a_n = (-1)^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert nicht

a_n ist divergent



3) $a_n = \frac{2n-1}{3n}$

$$(a_n) = \frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 - \frac{1}{n})}{\cancel{n} \cdot 3} \quad \rightarrow \text{Nullfolge}$$

$$= \frac{2-0}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

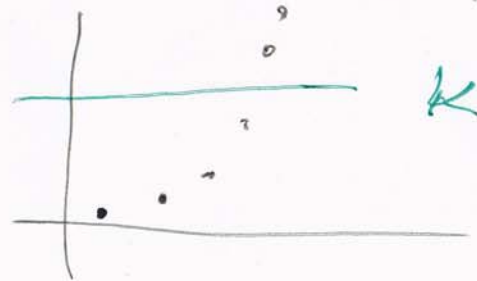
divergent

bestimmt-divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

4) $a_n = n^2 + 5$

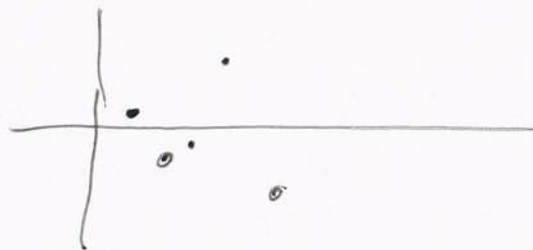
$$(a_n) = 6, 9, 14, \dots$$



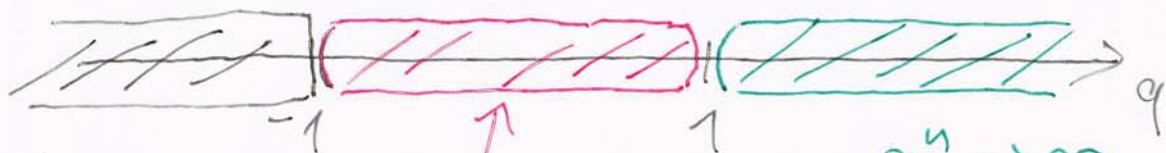
5) $a_n = (-1)^n n^2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ex. nicht

divergent (ohne bestimmt-divergent zu sein)



6) Geometrische Folge q^n , $q \in \mathbb{R}$



Zins 1% Guthaben G
 1. Jahr: $G \cdot 1.01$
 2. Jahr: $G \cdot (1.01)^2$
 ...
 n. Jahr: $G \cdot \underbrace{(1.01)^n}_q$

divergent
 (kein uneigentlicher Grenzwert)

q^n (eigentlichen oder uneigentlichen) GW hat

Bsp. wieso $\infty - \infty$ unentscheidbar

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ b_n = 2n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{array} \right\}$$

$$c_n = n + 3 \rightarrow \infty$$

$$a_n - b_n = n - 2n = -n \rightarrow -\infty$$

$$b_n - a_n = 2n - n = n \rightarrow +\infty$$

$$c_n - a_n = n + 3 - n = 3 \text{ konvergent}$$

analog für $\frac{\infty}{\infty}$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n \\ b_n = n^2 \end{array} \right\}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty$$

Bsp zu "Rechnen mit GW"

(6)

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 0 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^3}{5n^3} \right) \quad \begin{array}{l} \text{1. Versuch} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{5n^3} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{unentscheidbar} \end{array}$$

$$\text{2. Versuch} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{3}{5}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n - 7} \quad \begin{array}{l} \text{größte Potenz} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2})}{n^2(8 - \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2})} = \frac{-2 + 0 + 0}{8 - 0 - 0} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}} \end{array}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n} - \frac{n^2}{n+1} \right) \quad \begin{array}{l} \text{1. Vers} \\ \infty - \infty \rightarrow \text{unentscheidbar} \end{array}$$

$$\text{2. Versuch} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \infty \cdot 0 \rightarrow \text{unentscheidbar}$$

3. Versuch
Hauptnenner

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1) - n^2 \cdot n}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} + n^2 - \cancel{n^3}}{n^2 + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2} (1 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{1+0} = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Übung 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2$

$$= \left(\frac{7 - 0}{3 + 0} \right)^2 = \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{49}{9}}}$$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3(n-1) - n^3(n+1)}{(n+1)(n-1)} \right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{n^4} - n^3 - \cancel{n^4} - n^3}{n^2 - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3}{n^2 - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} (-2n)}{\cancel{n^2} (1 - \frac{1}{n^2})} = \frac{-\infty}{1-0} = \underline{\underline{-\infty}} \end{aligned}$$

$$4) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k-2}}$$

$\underbrace{10^{2k} \cdot 10^{-2}}_{\text{größte Potenz}}$

$$= \frac{6}{-0.2} = \underline{\underline{-30}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{10^{2k}}}{\cancel{10^{2k}}} \cdot \frac{(75 \cdot \cancel{10^{-k}} + 6)}{0.4 \cdot \cancel{10^{-k-3}} - \underbrace{20 \cdot 10^{-2}}_{0.2}}$$

$\textcircled{8}$
 $\downarrow$
 0

Bsp: Grenzwerte mit Wurzeln

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}{n+3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{n} \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{(1+0)^{\frac{1}{2}}}{1+0} = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$\overline{\overline{g.Pi.N}}$
 n aus Klammern

Bsp Fixpunkt - Iteration

9

Gesucht ist x für $x+1 = \sin(x)$ | $\arcsin$

F.P. Form

$$x = \sin(x) - 1$$

$$\arcsin(x+1) = x$$

(führt nicht weiter)

Wähle irgendeine a_1 , z.B. $a_1 = 1$

n	a_n	$f(a_n)$
1	1	$\sin(1) - 1 = a_2$
2	a_2	$\sin(a_2) - 1 = a_3$
3	a_3	$\sin(a_3) - 1 = \dots$
...		

Ist $a_n = 2n^3 - n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$?

Nein, denn $\left| \frac{2n^3 - n^2}{n^2} \right| \stackrel{b_n}{=} \left| \frac{2n - 1}{1} \right| \rightarrow +\infty$
nicht beschränkt

Ist $a_n = 2n^3 - n^2 \in \mathcal{O}(n^4)$?

Ja, denn $\left| \frac{2n^3 - n^2}{n^4} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ist beschränkt