

V MA 1 - 27.11.2019

(1)

Orga

Heute keine Sprechstunde $\rightarrow$ 28.11., 10⁰⁰ - 10⁴⁵

Sprechst. B. Breiderhoff Mi., 11³⁰ - 12²⁰

Am 11.12. keine Ü D. Zühlke $\rightarrow$ bitte verteilen
Sie sich auf die anderen Ü

Taylorpolynom

Bsp $f(x) = \ln(x)$ um den Punkt $x_0 = 1$ in ein
Taylor-Polynom der Ordnung $n=3$ entwickeln

Lsg

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$f \cdot x_0 = 1$
0	$\ln(x)$	0	
1	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	1	
2	$-1 \cdot x^{-2}$	-1	
3	$2 \cdot x^{-3}$	+2	
4	$-6 x^{-4}$	/ / / /	

$$h = x - x_0$$

$$= x - 1$$

$$\begin{aligned} P_3(h) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} h^3 \\ &= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{(-1)}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{2}{3!} (x-1)^3 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 \end{aligned}$$

An der Stelle 1.5 ist $h = 1.5 - 1 = 0.5$

$$P_3(h) = 0.5 - \frac{1}{2} 0.5^2 + \frac{1}{3} 0.5^3 = 0.41\bar{6}$$

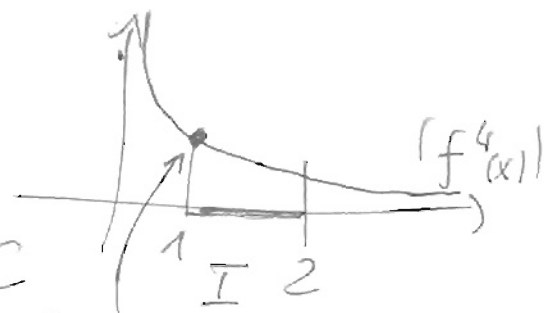
(2)

(3)

Restglied für Intervall $[1, 2]$:

$$\text{Es ist } |f^{(4)}(x)| = |-6x^{-4}| = \frac{6}{x^4}$$

Maximalwert für $x=1$, also $\frac{6}{1^4} = 6 = C$



Maximalwert in I

$$\Rightarrow |R_3(x)| = \frac{6}{4!} (x-x_0)^4$$

$$\Rightarrow |R_3(1.5)| = \frac{6}{24} \cdot 0.5^4 = 0.0156$$

Probe Mit Taschenrechner

$$|\ln(1.5) - 0.41\bar{6}| = 0.01120 < 0.0156$$

✓

Ü sin - Taylor

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$ $x_0 = 0$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	

$$h = x - x_0 = x$$

$$P_5(h) = 1 \cdot \frac{x}{1!} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 1 \cdot \frac{x^5}{5!}$$

$$P_5(0.3) = \frac{0.3}{1!} - \frac{0.3^3}{3!} + \frac{0.3^5}{5!}$$

$$= 0.2955 \dots$$

Restglied : Das maßgebliche
 I ist $[x_0, 0.3]$, also
 $[0, 0.3]$

Gesucht: Obere Schranke C für $|\sin(x)|$ in $I = [0, 0.3]$
 ist einfach $C = 1$

$$\Rightarrow |R_5(x)| = \frac{C}{6!} |x - x_0|^6 = \frac{1}{6!} 0.3^6 \approx 1 \cdot 10^{-6}$$

Eig. diff. barer Funktionen

(5)

Krümmungsverhalten

Bild: "konkav von oben"



"konvex von oben"



Merkspruch:

Ist der Bauch konkav, war die Anna brav

" " " konvex, hatte Anna ...

Bsp zu Extremwerten

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x_1=0 \vee x_2=2}_{\text{Kandidaten f. Extrema}}$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

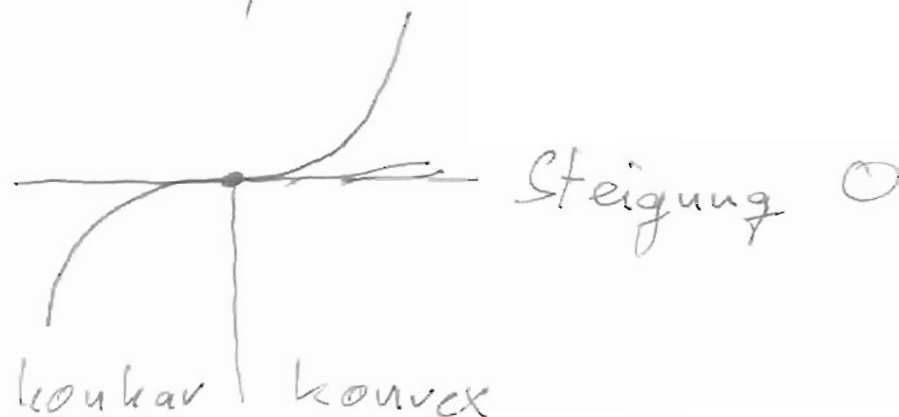
Kandidat x_1 : $f''(x_1) = f''(0) = -6 \Rightarrow$ rel. Maximum

" x_2 : $f''(x_2) = f''(2) = 12 - 6 = 6 \Rightarrow$ rel. Minimum

Wendepunkt



Sattelpunkt



(i1) Nullstellen, Wendepunkt und
Wendetangente für $f(x) = x(x-3)^2$
Lsg. $f(x) = x \cdot (x-3)^2$ Nullstellen nach
Faktorregel $x=0$
oder $x=3$

$$= x(x^2 - 6x + 9)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$$

Wendepunkt bei $6x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12}{6} = 2$$

Wendetangente: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9$
 $= -3$

$$f(2) = 2 \cdot (2-3)^2 = 2$$

$$w(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$= -3(x-2) + 2 = \underline{\underline{-3x + 8}}$$

(i2) Minimum für
 $f(t) = \frac{K}{t} + 100 + 3t^3$ mit $K=90.000$

Lsg

$$f'(t) = -\frac{K}{t^2} + 9t^2$$

$$f''(t) = +\frac{2K}{t^3} + 18t > 0 \quad \forall t$$

falls $K > 0$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{K}{t^2} + 9t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t^4 = K$$

$$\Leftrightarrow t^4 = 10000$$

$$\Leftrightarrow t = \underline{\underline{10}}$$

Optimale Halte dauer
10 Jahre