Vorlesung Mathematik 1 4.12.19

Lineare Algebra

Ziel: Lösen von linearen Gleichungssystemen (LGS)

Zentraler Begriff: Linear

Bp: s. Folie

ganzrationale Fkt. 4. Grades gesucht:

$$y = \underline{a}x^4 + \underline{b}x^3 + \underline{c}x^2 + \underline{d}x + \underline{e}$$

die Unbekannten sind a, b, c, d, e

Bedingungen einsetzen und LGS aufstellen

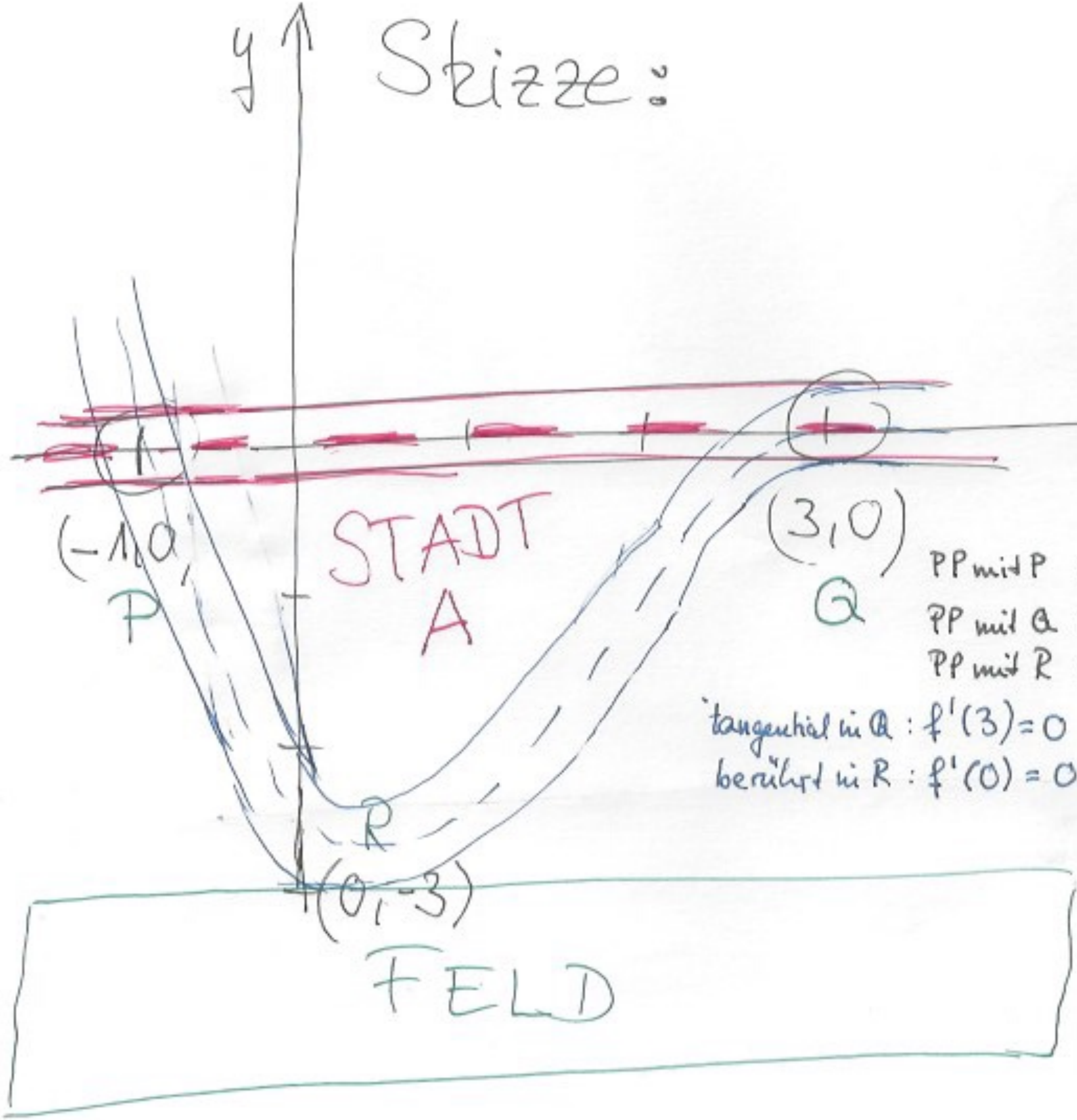
Lineares Gleichungssystem allgemein:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

n Unbekannte

m Gleichungen

Skizze:



$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

PP mit P : $0 = a - b + c - d + e$

PP mit Q : $0 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$

PP mit R : $-3 = a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e$ $\quad \boxed{e=-3}$ *

tangential in Q : $f'(3) = 0 \quad 0 = 108a + 27b + 6c + d$

berührt in R : $f'(0) = 0 \quad 0 = 4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2c\cdot 0 + d$ $\quad \boxed{d=0}$ *

$$a - b + c - d + e = 0$$
$$81a + 27b + 9c + 3d + e = 0$$
$$108a + 27b + 6c + d = 0$$

mit *

$$a - b + c = 3$$
$$81a + 27b + 9c =$$
$$108a + 27b + 6c =$$

Folgendes GS: $\boxed{\begin{aligned} a-b+c&=3\\ 81a+27b+9c&=3\\ 108a+27b+6c&=0 \end{aligned}}$ $\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3\\ 81 & 27 & 9 & 3\\ 108 & 27 & 6 & 0 \end{array}\right)$

"Lösungsvektor"

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 81 & 27 & 9\\ 108 & 27 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times3\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix}}_{3\times1\text{-Matrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3\\ 3\\ 0 \end{pmatrix}}_{3\times1\text{-Matrix}}$$

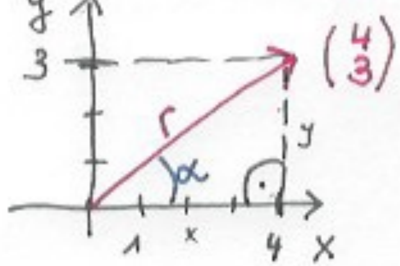
Einführung in die Vektorrechnung

freier Vektor   Länge und Richtung

im Gegensatz zu Skalar, der eine Größe nur durch eine Zahl darstellt

↓

"Orientieren in einem Koordinatensystem



$\binom{4}{3}$ Koordinatendarstellung

Pythagoras: $4^2 + 3^2 = r^2$

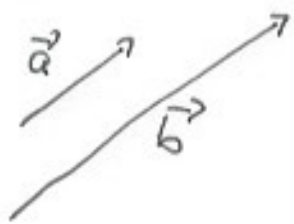
$16 + 9 = r^2 \Rightarrow r = 5$

$\tan\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{y}{x}$

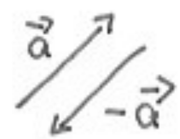
Vektor:

$\overrightarrow{AB}$

parallele Vektoren

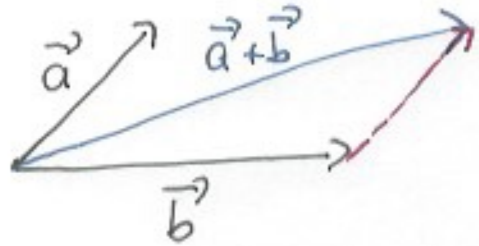


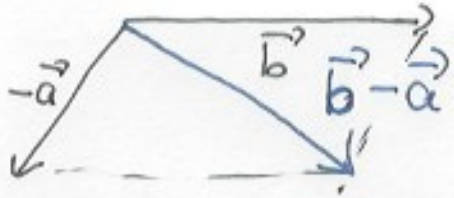
inverse Vektoren



Vektoroperationen

1) Addition von Vektoren



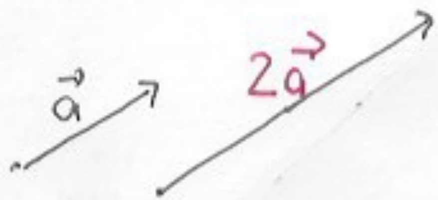


Es gilt: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ Kommutativgesetz

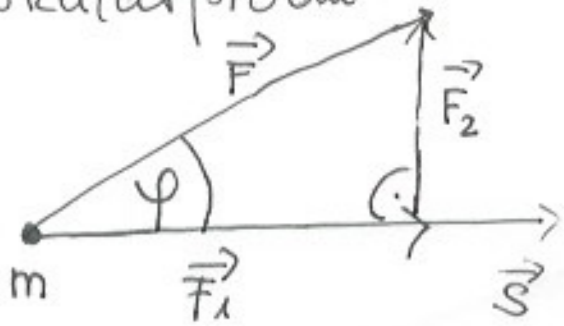
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ Assoziativgesetz

Vektorpolygon : Add. v. mehr als zwei Vektoren

Multiplikation mit einem Skalar



Skalarprodukt



$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$W = |\vec{F_1}| \cdot |\vec{s}|$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F_1}| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi$$

$$W = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi \cdot |\vec{s}|$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$$

Allg: $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\quad \sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b} = \varphi$

$$\boxed{c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi} \qquad c = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Achtung: Das Ergebnis des Skalarproduktes ist eine Zahl,

ein Skalar!

kein Vektor!

Eigenschaften: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ja

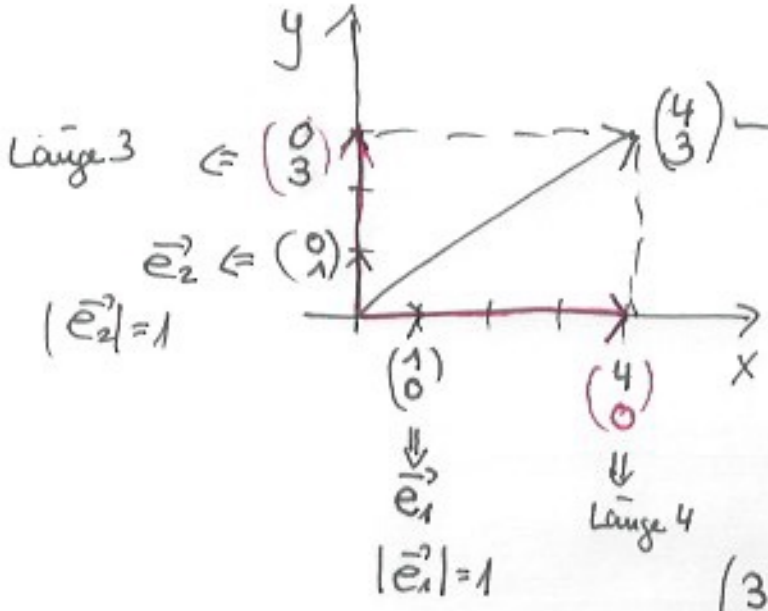
$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$ Distributivgesetz

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

zu Hause überlegen: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$?
($\vec{a}$ nicht senkr. auf $\vec{b}$)

Vektoren in Koordinatenschreibweise



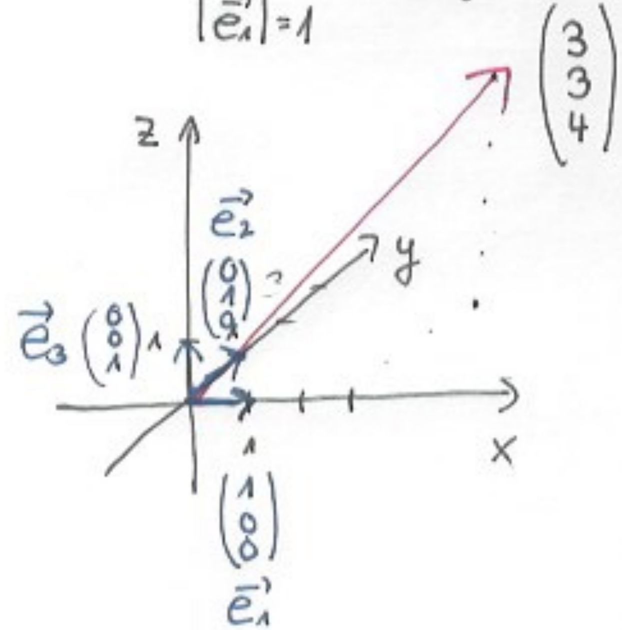
$\boxed{4}\,\vec{e}_1 + \boxed{3}\cdot\vec{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$

Koordinaten

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ Basis des $\mathbb{R}^2$

(alle anderen Vektoren können aus $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ gebildet werden)

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ Einheitsvektoren



$\boxed{3}\cdot\vec{e}_1 + \boxed{3}\cdot\vec{e}_2 + \boxed{4}\,\vec{e}_3$ in $\mathbb{R}^3$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ Basis des $\mathbb{R}^3$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Def. ($\boxed{\text{Linearkombination}}$)

$\vec{a}$ heißt Linearkombination von $\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}$

$\Longleftrightarrow \vec{a} = \lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \dots + \lambda_n \vec{b_n}$

Def. (Linear unabhängig)

gilt $\vec{0} = \lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \dots + \lambda_n \vec{b_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, dann sind

$\vec{b_1}, \dots \vec{b_n}$ lin. unabh.

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$0 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \Rightarrow 2\lambda_1 = -4\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2$

$0 = 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \Rightarrow \dots \lambda_1 = -2\lambda_2$

falls z.B. $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -2$ $\vec{0} = -2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

nicht trivial, d.h.

$\vec{a}, \vec{b}$ lin. abhängig!

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \Rightarrow 2\lambda_1 = -5\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{5}{2}\lambda_2 \\ 0 = 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \Rightarrow 3\lambda_1 = -6\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$