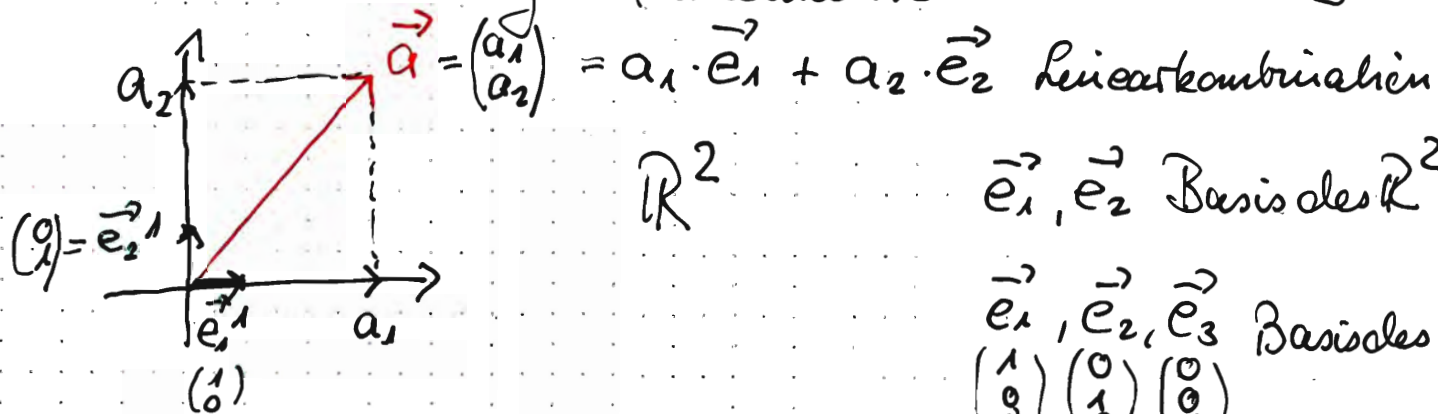


Vorlesung Mathematik 1 11.12.2019 (1)



$\mathbb{R}^2$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ Basis des $\mathbb{R}^2$

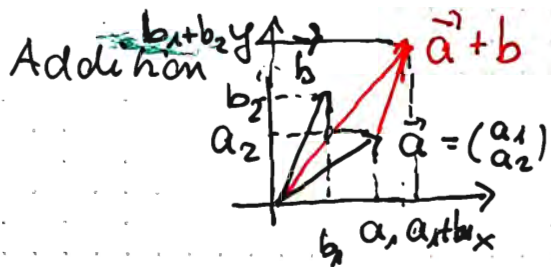
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ Basis des $\mathbb{R}^3$
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Rechnen mit Vektoren in der Koordinatenschreibweise:



(2)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt in der Koordinatenschreibweise:

$\vec{a}, \vec{b}$ wie *

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

Skalarprodukt nur mit Vektoren gleicher Dimension

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 + 15 + 0 + 21 = 28$

③

Hinweis auf Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Def: (orthogonale Vektoren) $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Skalar-
produkt

Matrizenrechnung

Def: Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & a_{ik} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ -Matrix

m Zeilen n Spalten

a_{ik} steht in der i -ten Zeile
und der k -ten Spalte

(4)

Bem: Ein Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ auch als $(m \times 1)$ -Matrix
aufzufassen

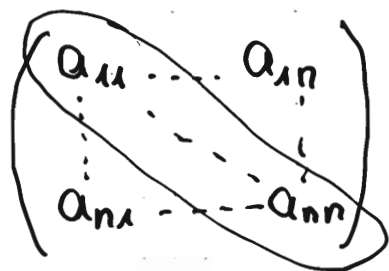
Ein Zeilenvektor $(a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n})$ auch als
 $(1 \times n)$ -Matrix

Spezielle Matrizen

Quadratische Matrix : $m = n$

Diagonalmatrix
quadratisch

$a_{ij} = 0$ für $i \neq j$
 $a_{ij} \neq 0$ für $i = j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$


Hauptdiagonale

(5)

Einheitsmatrix

$$\mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 2x2-M.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

(n x n) - Matrix

$$\mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (3x3)-M.}$$

Transponierte einer Matrix A : A^T

aus Zeilen werden Spalten
aus Spalten werden Zeilen

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 11 & 0 \\ 4 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(5x3)-M.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3x5)-M.

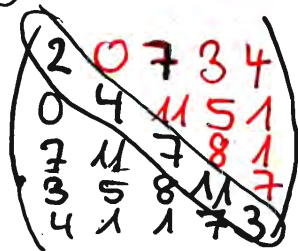
$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 11 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $(A^T)^T = A$

Symmetrische Matrix

A symmetrisch $\Leftrightarrow A = A'$ Bem: A quadratisch
ist Vor.

Bp:



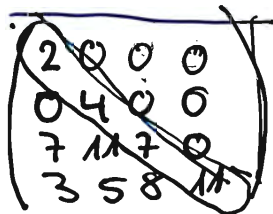
2	0	7	3	4
0	4	11	5	1
7	11	7	8	1
3	5	8	11	7
4	1	1	7	3

"an der Hauptdiagonalen gespiegelt"

A schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow A' = -A$

Dreiecksmatrix

Bp:



2	0	0	0
0	4	0	0
7	11	7	0
3	5	8	11

untere Dreiecksmatrix

Quadratische Matrix, Koeffizienten
oben bzw unterhalb der Hauptdiagonalen
alle gleich Null

analog: obere Dreiecksmatrix

Untermatrizen werden im Kapitel Determinanten
besprochen

Rechnen mit Matrizen

Addition von Matrizen $A, B (m \times n)$ -Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechengesetze für das Rechnen mit Matrizen A, B (8)

$$A+B = B+A \quad \text{Kommutativgesetz}$$

$$(A+B)+C = A+(B+C) \quad \text{Assoziativgesetz}$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{Distributivgesetz}$$

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$A + \underset{\uparrow}{0} = A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

Multiplikation von Matrizen

(9)

Bp: Drei Autofirmen A, B, C produzieren Kleinwagen (K), Mittelklassewagen (M), Oberklassewagen (O)

	K	M	O
A	1000	1500	500
B	1500	1000	600
C	700	1400	800

(3×3) -M.

	Einnahme in den Jahren 14-17			
	2014	2015	2016	2017
K	9900	10000	10500	11000
M	19000	19500	20000	21000
O	30000	31000	31500	33000

(3×4) -M.

Frage: Einnahmen der Firmen in den Jahren 2014, 2015, 2016, 2017

Bp: Einnahmen Firma A in 2014: $1000 \cdot 9900 + 1500 \cdot 19000 + 500 \cdot 30000$
"Skalarprodukt"

	2014	2015	2016	2017
A	53,4	54,75	56,25	59
B	51,85	53,1	54,65	57,3
C	57,53	59,1	60,55	63,5

2. Zeile, 4. Spalte

(3x4) - Matrix

3. Zeile, 3. Spalte

$$700 \cdot 10500 + 1400 \cdot 20000 + 500 \cdot 31500 = 60.55 \text{ Mio.}$$

Allg. Def:

$$\begin{matrix} A \cdot B & = & C \\ m \times n & n \times l & m \times l \end{matrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\text{Bp: } c_{57} = \sum_{k=1}^n a_{5k} b_{k7}$$

5. Zeile, 7. Spalte

"Skalarprodukt
aus 5. Zeile und
7. Spalte

Fragen: A (3x4)-Matrix B (5x4) Matrix
C (4x5) Matrix

(11)

A · C (3x5) Matrix ✓

(A · C) · B (3x4) Matrix ✓

B · C (5x5) Matrix ✓

A · B^T (3x5) Matrix ✓
etc.

A · B = B · A gilt allgemein nicht! Dimensionen!

Prüfen Sie zu Hause: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$?

Bem: $A \cdot E = A$ E Einheitsmatrix

A quadr.

Rolle des "1" in $\mathbb{R}$

$$A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{Distributivgesetz}$$

$$(A+B)C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\lambda(A \cdot B) = \lambda A \cdot B = A \cdot \lambda B \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Unterschiede zur Multiplikation in $\mathbb{R}$

$$\text{In } \mathbb{R}: a^2 = a \Rightarrow a = 1 \text{ oder } a = 0$$

$$\text{Matrizen: } A^2 = A \cdot A \quad A \neq E$$

$$\text{Bsp: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A \neq 0$$

$$b \cdot c = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ oder } c = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer Matrix

$$\text{In } \mathbb{R}: a \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$x = a^{-1}$$

Matrizen: A quadratische Matrix

$B = A^{-1}$ heißt Inverse zu A

$$\Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

A regulär $\Leftrightarrow$ A besitzt Inverse

A singular $\Leftrightarrow$ A besitzt keine Inverse

(14)

Satz: Jede reguläre Matrix besitzt genau eine Inverse

Beweis: Ann: A regulär und besitzt Inverse B und C

$$\text{Dann gilt: } A \cdot C = A \cdot B = \underline{B \cdot A} = E$$

$$\boxed{B} = B \cdot \underline{E} = B \cdot (A \cdot C) = \underline{(B \cdot A) \cdot C} = \underline{E \cdot C}$$

$$(B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = \boxed{C}$$

damit $\nrightarrow$ zur Annahme

und A besitzt nur eine Inverse.