Vorlesung Mathematik 15.1.2020

Wdh. Gauß'scher Lösungsalgorithmus

Lineare GS und Inverse der Koeffizientenmatrix

Erinnerung: A^{-1} ist die Inverse von $A \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Merke: Inverse nur bei quadr. Matrizen

Erinnerung: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ lin. GS $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Falls A quadratisch, regulär (= voller Rang)

dann ex. eine eindeutige Lösung des LGS

Lösung: $x_1 = b_1^*$ $x_2 = b_2^*$ ... $x_m = b_m^*$

als Matrizengleichung: $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$

Bp: Treppenstufenform:

$$\xrightarrow{GLA} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Rück-Substitution}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$E \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

äquivalente Umformungen transformieren die erweiterte Koeffizientenmatrix in die "erweiterte" Einheitsmatrix, an der die Lösungen des LGS direkt abzulesen sind:

$$A \longrightarrow E$$

$$A\cdot\vec{x}=\vec{b}$$

$$\downarrow$$

$$E\cdot\vec{x}=\vec{b}^{*}$$

$$A^{-1}\cdot A\cdot\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{b}$$

Anm: Sei A^{-1} bekannt $\quad A^{-1}\cdot A\cdot\vec{x}=E\cdot\vec{x}=\underbrace{A^{-1}\cdot\vec{e}_j}_{j\text{-te Spalte der Inversen}}$

Damit ergibt sich folgende Vorgehensweise:

Anwenden des Gauß'schen LA simultan auf $A\cdot X=E$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Umformen $\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ simultan auch auf E anwenden

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}$$

Gesucht: A^{-1}

Bp: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Z − 2× 1.Z

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.Z : 2

+ 3×(2.Z:2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Z ×2

1.Z − 3.Z.

2.Z − ½ · 3Z

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.Z − 2×2.Z

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Probe:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot A^{-1} = E$$

Fazit Gauß'scher LA

Ein lin. GS mit n Gleichungen und n Unbekannten besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn

- $rg(A) = n$ — Rang der Koeff.matrix ist "voll"
- A regulär
- A besitzt eine Inverse

Determinanten

Erinnerung: $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = E$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

↓ Matr. multipl.

4 Gleichungen

↓

1 Ausdruck $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ konnte eliminiert werden

$\boxed{\text{A quadratisch}}$

$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

heißt die Determinante

"Kennzahl"

D ist eine reelle Zahl, die aus den Koeffizienten der Matrix nach bestimmten Regeln berechnet wird.

Schreibweise: A Matrix → det A bzw $|A|$ bzw $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$A = (a_{11}) \qquad \det A = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

$$- a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

$$- a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$

6 Summanden mit jeweils 3 Faktoren (aus jeder Zeile einer)

⑧

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$\det A$ = 24 Summanden mit jeweils 4 Faktoren

$$\det A = a_{\underline{1}1}\, a_{\underline{2}2}\, a_{\underline{3}3}\, a_{\underline{4}4} + \underbrace{\text{-----} + \text{-----}}_{24 \text{ Summanden}}$$

A $(m \times m)$-Matrix

$$\det A = \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{mj_m}$$

$P(j)$: Permutationen des zweiten Index $\quad I(j)$: Zahl der Inversionen

Regel von Sarrus für 3-reihige Determinanten

$$
\begin{array}{ccccc}
+ & + & + & - & - \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}
$$

$$
\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}
$$

"Produkte der "Hauptdiagonalen"

− Produkte der "Nebendiagonalen"

Eigenschaften und Regeln für Determinanten

1) Vertauschen zweier benachbarter Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante

2) Vertauscht man beliebig viele Zeilen, so ändert sich ggf. das Vorzeichen, nicht der Wert der Determinante

3) Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor λ, dann ist die Determinante auch das λ-Fache

folglich ist $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A$

4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5) Die Addition des λ fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Determinante nicht

Bp: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda(a_{11} \; a_{12})$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} \end{vmatrix}$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$a_{11}(a_{22}+\lambda a_{12}) - a_{12}(a_{21}+\lambda a_{11})$$

$$= a_{11}a_{22} + \cancel{\lambda a_{11}a_{12}} - a_{12}a_{21} - \cancel{\lambda a_{12}a_{11}}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

!

$\boxed{\text{6) Sind Zeilen lin. abh., dann } \det A = 0}$

Einfachere Methoden zur Berechnung von Determinanten

Adjunkte und Adjungierte Matrix

Erinnerung: Untermatrix

Unterdeterminanten $(m-1)$ ter Ordnung

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\
a_{21} & & & & \\
\vdots & & & & \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\
\vdots & & & & \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm}
\end{vmatrix}
\quad \text{i-te Zeile}
$$

j-te Spalte

streichen

$$
|A|_{ij} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{m1} & & a_{mj-1} & a_{mj+1} & & a_{mm}
\end{vmatrix}
$$

heißt Minor

Eine Determinante n-ter Ordnung besitzt n^2 Minoren

Bp: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ besitzt 9 Minoren

$|A|_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ $\quad |A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$|A|_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad |A|_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$|A|_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad |A|_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$|A|_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6$ $\quad |A|_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5$ $\quad |A|_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 18$

Man legt $\begin{vmatrix} + & - & + & \\ - & + & & \\ + & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$ zugrunde

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A|_{ij}$$ heißt die Adjunkte zu a_{ij}

Fasst man die Adjunkten zu einer Matrix zusammen

Rot für Bp. v. 13

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 18 \end{pmatrix} \quad A_{ad} = \begin{pmatrix} \overset{2}{|A|_{11}} & \overset{1}{-|A|_{21}} & \overset{-6}{|A|_{31}} \\ \overset{-3}{-|A|_{12}} & \overset{2}{|A|_{22}} & \overset{-5}{-|A|_{32}} \\ \overset{1}{|A|_{13}} & \overset{-3}{-|A|_{23}} & \overset{18}{|A|_{33}} \end{pmatrix}$$

adjungierte Matrix

Bp. für eine (3x3) Matrix

adj. Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$