

①

Vorlesung Mathematik 22.01.2020

Hilfsmittel zur Berechnung von "höherreihigen" Determinanten
(ab 4 reihig)

Eine Determinante $|A|$ m -ter kann entweder nach einer Zeile i oder einer Spalte j entwickelt werden

a) Entw. nach Zeile i

$$\det A = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A|_{ij}$$

b) Entw. nach Spalte j

$$\det A = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij}$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ \overset{+}{4} & \overset{-}{2} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{-2} & \overset{-}{3} & \overset{+}{1} \end{pmatrix}$ (2)

Determinantenbestimmung durch Entw. nach einer Zeile bzw. Spalte

nach 1. Zeile $\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 0$$

$$= 10 + 2 = 12$$

nach 3. Spalte $\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 12$$

③

Also wichtig zur Erleichterung der Rechnung:

Determinanten erst umformen, damit in einer Zeile bzw. Spalte "viele Nullen" stehen.

Bp:
$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Entw.
nach 2. Zeile

$\det A = (-1) \cdot \begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Entw. nach 4. Zeile

$= \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Entw. nach 1. Zeile

$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1) \cdot 2 = -2$

Umfangungsmöglichkeiten vor der Det.-berechnung:

1) Triangulieren

Überführen in Dreiecksform

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} \cdot \\ \text{Entw. nach 1. Spalte} \end{matrix} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{vmatrix}$$

= =

Entw. nach 1. Spalte

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{mm} = \prod_{i=1}^m a_{ii}$$

Bp:

$$\det A \stackrel{-1,2}{\stackrel{\pm 1,2}{=}} \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Triangulieren!

(5)

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \textcircled{1} \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \cdot 2 \\ + 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{2} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 32.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \text{Zeile} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{\frac{9}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Spalten vertauschen

$$\begin{matrix} \xrightarrow{3} \\ (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} \end{matrix}$$

$\textcircled{3}$ Spaltenvertauschungen = -36

Determinante und Inverse einer Matrix

(6)

1) A regulär $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
(= A besitzt eine Inverse)

2) A regulär $\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{\text{adj}}$

Zum Schluß: Eine Anwendung der Determinanten
Cramer'sche Regel zur Lösung eines lin. GS

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

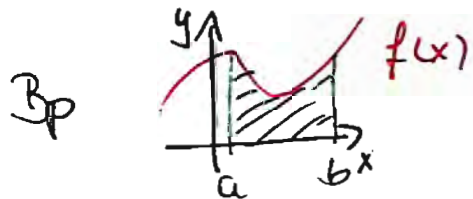
A ($m \times m$) Matrix

In der Koeffizientenmatrix wird die Spalte j durch den Lösungsvektor
ersetzt: A_j Dann lauten die Lösungen: $x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad j=1, \dots, m$

Integralrechnung

Zwei Herangehensweisen

1) Schule : Berechnung von Flächen unter oder zwischen Kurvenabschnitten



$\Rightarrow$ das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

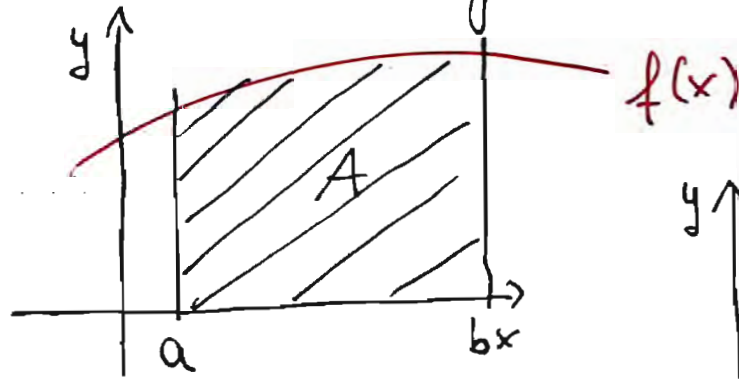
'Ableiten'

2) Differentialrechnung $y = f(x) \rightarrow y' = f'(x)$

$y' = f'(x) \xrightarrow{?} f(x)$ "Aufleiten"
 $\Rightarrow$ das unbestimmte Integral

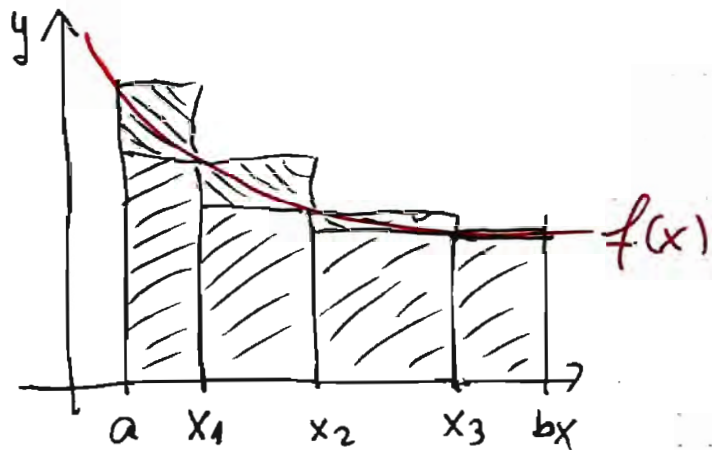
Zusammenhang von bestimmten und unbestimmtem Integral wird im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formuliert ($\rightarrow$ später)

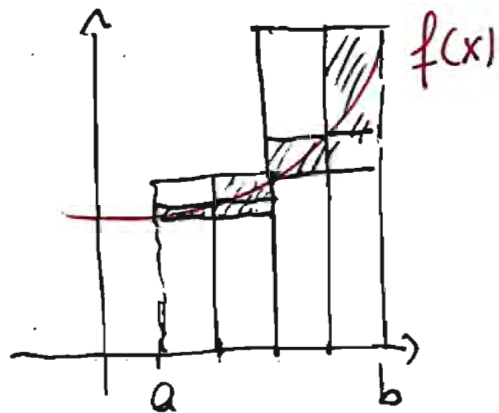
Das bestimmte Integral



f stetig auf $[a, b]$

$[a, b]$ wird in Teilintervalle zerlegt.





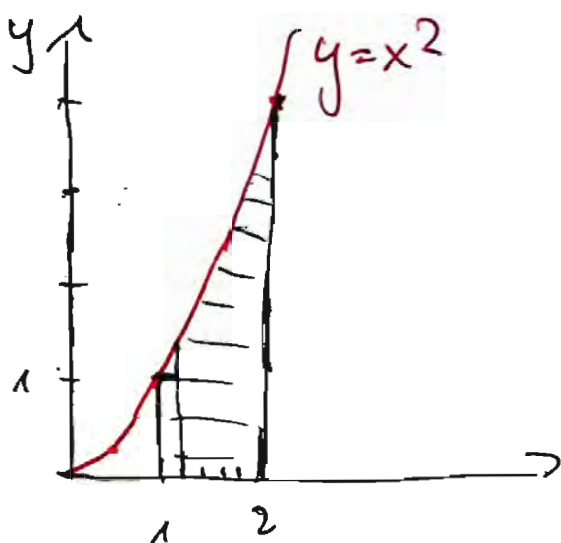
9
Mit zunehmender "Verfeinerung" der Intervalle wird die Differenz zwischen Ober- und Untersumme der Rechtecksflächen kleiner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Höhe des} \\ k\text{-ten} \\ \text{Rechtecks}}}{f(x_k)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Breite des} \\ k\text{-ten} \\ \text{Rechtecks}}}{\Delta x_k} = \int_a^b f(x) dx$$

x Integrationsvariable
 a untere } Integrationsgrenze
 b obere }

$f(x)$: Integrand

Bp: $f(x) = x^2$



$\int_1^2 x^2 dx = 2$

$[1, 2]$ wird zunächst in 5 gleich große Teile zerlegt
 $\Delta x = 0,2$

Berechnung der Untersumme:

$$U_5 = 1^2 \cdot 0,2 + 1,2^2 \cdot 0,2 + 1,4^2 \cdot 0,2 + 1,6^2 \cdot 0,2 + 1,8^2 \cdot 0,2$$
$$= 10,2 \cdot 0,2 = 2,04$$

Berechnung der Obersumme:

$$O_5 = 1.2^2 \cdot 0.2 + 1.4^2 \cdot 0.2 + 1.6^2 \cdot 0.2 + 1.8^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.2 \\ = 13.2 \cdot 0.2 = 2.64$$

Es gilt $2.04 \leq A \leq 2.64$

Wählt man 10 Teilintervalle : $2.185 \leq A \leq 2.485$
20 " : $2.258 \leq A \leq 2.408$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \frac{7}{3} = 2.\overline{33}$$

Grenzwertberechnung für $f(x) = x^2$ ist an dieser Stelle zu kompliziert

$$\int_a^b x dx$$

Wir wählen $f(x) = x$

o.B.d.A. Untersumme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x$$

$$\downarrow f(x) = x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_{k-1} \cdot \Delta x$$

x_{k-1} ist der kleinste Wert auf dem Teilintervall

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \underbrace{[a + (k-1)\Delta x]}_{= x_{k-1}} \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a \cdot \Delta x + (k-1) \Delta x \cdot \Delta x \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a \cdot \Delta x + (k-1) (\Delta x)^2 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \sum_{k=1}^n (k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a \cdot \Delta x + \Delta x^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \left(\underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Teil} \\ \text{von } [a, b]}}{n \cdot a \cdot \Delta x} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left(n \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right)$$

↘ für $n \rightarrow \infty$
gegen 1

$$= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right)$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Also : $\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$