Letzte Vorlesung Mathematik im WS 19/20 (1)

29. 1. 2020

Vor einer Woche: das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$f(x) = x$ $\qquad \int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ $\qquad$ schwierig über Grenzwertberechnung

daher: Regeln notwendig zum vereinfachten Rechnen

(vgl. Ableitungsregeln)

Aus bekannten Ableitungen:

$$f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad F'(x) = f(x)$$

$$f(x) = e^x \rightarrow F(x) = e^x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow F(x) = \sin x$$

$$\vdots$$

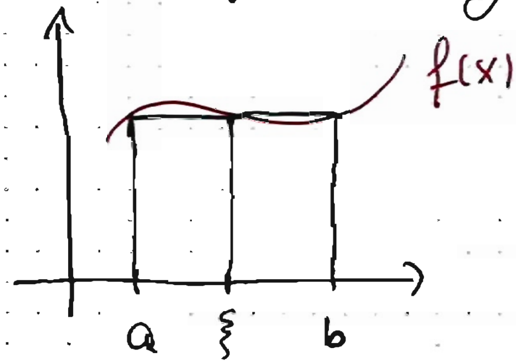
Grundregeln: $\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$a < b < c$$

Beim Rechnen gilt die "Linearität"

Mittelwertsatz der Integralrechnung anschaulich



$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi)$$

flächengleiches Rechteck

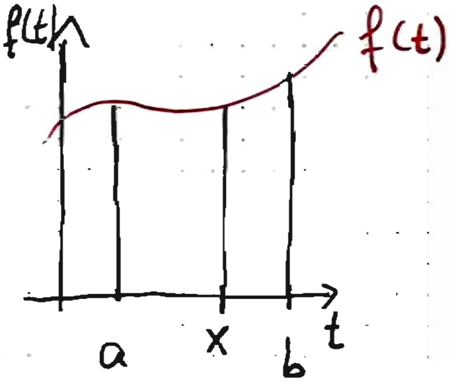
Das unbestimmte Integral

gesucht $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

Auch $(F(x)+C)' = f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

4



$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

obere Integrationsgrenze ist nun Variable : $I(x)$: Integralfunktion
unbestimmte Integral

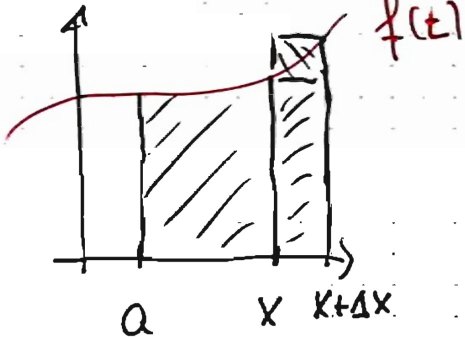
$$I_1 : x \longrightarrow \int^x f(t)\,dt$$

$I_2 : x \to \int_{c_2}^{x\,c_1} f(t)\,dt$ mit $x, c_1, c_2 \in [a,b]$

$$I_1 - I_2 = \int_{c_1}^{x} f(t)\,dt - \int_{c_2}^{x} f(t)\,dt = \int_{c_1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{c_2} f(t)\,dt$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt$$

5



$I(x)$

Also:
Die erste Ableitung eines unbestimmten Integrals ist der Integrand
$f(x) = I'(x)$

Differenzieren und Integrieren sind inverse Operationen

$$f(x)\cdot\Delta x \le \Delta I \le f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

Umformen $$f(x) \le \frac{\Delta I}{\Delta x} \le f(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x) \le I'(x) \le f(x)$$

Also: $I'(x) = f(x)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Folgerung:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

Wir wissen: Berechnung von bestimmten Integralen erfolgt über die Stammfunktion

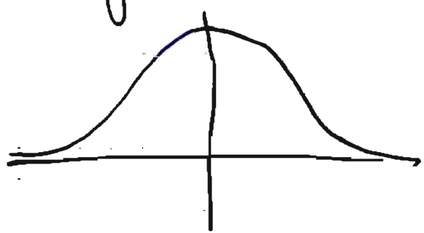
Wie findet man Stammfunktionen?

Bp.: $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Grundintegrale sind in Formelsammlungen „gelistet".

Sind zusammengesetzt Funktionen durch endlich viele Schritte aus elementaren Funktionen darzustellen, dann heißt das Integral "geschlossen" lösbar. Hierfür gibt es Regeln.

Berühmte nicht geschlossen lösbare Integrale:



Gauß'sche Glockenkurve

→ Tabellen

Integrationsregeln

1) Partielle Integration – Produktintegration

Herleitung: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Umformung: $f(x)\cdot g'(x) = (f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x)$

Integration auf beiden Seiten $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int (f(x)\cdot g(x))'\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Produktintegration: weil der Integrand ein Produkt ist
Partielle Integration: weil noch ein Integral "übrig" bleibt

Bp: 1) $\int x \cdot e^x \, dx$ $\qquad f(x) = x \quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \quad g(x) = e^x$

$$= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x = e^x (x-1) + C$$

2) $\int x^2 \cdot e^x \, dx$ $\qquad f(x) = x^2 \quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 2x \quad g(x) = e^x$

$$= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \underbrace{\int x \cdot e^x \, dx}_{= e^x (x-1) \text{ s. 1)}} = x^2 \cdot e^x - 2(x-1) \cdot e^x + C$$

also hier 2x partielle Integration notwendig

3) $\int \overset{f(x)}{\sin x} \cdot \overset{g'(x)}{\cos x}\, dx$

$f(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x$

$f'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x$

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x\, dx \quad \Big| + \int \cos x \sin x\, dx$$

$$2 \int \sin x \cos x\, dx = (\sin x)^2$$

etwas tricky!

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2} (\sin x)^2 + C$$

4) zu Hause : $\int \ln x\, dx$ Tipp : $\int 1 \cdot \ln x\, dx$

2) Integration durch Substitution

Aus Kettenregel: $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Bp: $\int \sqrt{x^2+2} \cdot \underbrace{2x \, dx}_{dz}$

$z = x^2 + 2$

$z' = \frac{dz}{dx} = 2x$

$dz = 2x \, dx$

$= \int \sqrt{z} \, dz$

$= \int z^{\frac{1}{2}} \, dz = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}}$

Rücksubstitution: $\int \sqrt{x^2+2} \cdot 2x \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2+2)^3} + C$

Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(z) \cdot dz$$

$$dz = g'(x)\, dx$$

Wahl der Substitutionsgleichung $g(x)$

Ableitung von $g(x)$ muss bis auf Konstante schon „dastehen".

Bp: $\int \underline{x} \cdot e^{-x^2}\, dx$ $\qquad z = -x^2 \qquad \frac{dz}{dx} = -2x$

$dz = -2x\, dx$

$dx = \frac{dz}{-2x}$

$$= -\frac{1}{2} \int e^z\, dz = -\frac{1}{2} e^z + C$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Korrektur

Bp: $$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

$z = 1+\sin^2 x$

$\frac{dz}{dx} = 2\sin x \cdot \cos x$

$dz = 2\sin x \cdot \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz$$

NR:

$(\sin^2 x)'$

$=((\sin x)^2)'$

$\underset{\uparrow}{=} 2\sin x \cdot \cos x$

Kettenregel

$$= \frac{1}{2}\ln|z| + C$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\ln|1+\sin^2 x| + C$$

Rücksubstitution

Integration gebrochenrationaler Funktionen mittels Partialbruchzerlegung (bei Interesse Selbststudium

Uneigentliche Integrale

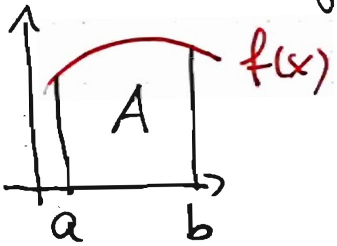
B. $$\lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} f(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

heißt das uneigentliche Integral

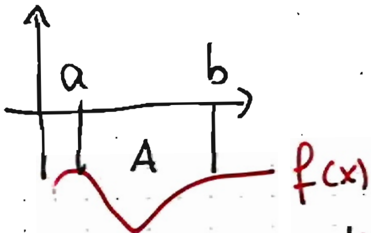
Bp: $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{b_n \to \infty} \int_1^{b_n} x^{-4}\,dx = \lim_{b_n \to \infty} \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^{b_n}$$

$$= \lim_{b_n \to \infty} \left[\underbrace{-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b_n^3}}_{\to 0} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1^3} \right] = \frac{1}{3}$$

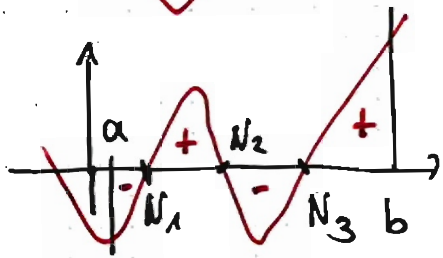
Anwendungen



$$A = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{falls } f(x) \geq 0 \text{ auf } [a,b]$$



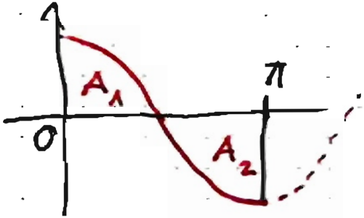
$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \quad \text{falls } f(x) \leq 0 \text{ auf } [a,b]$$



Zerlegung in Teilintegrale von "Nullstelle" zu "Nullstelle"

$$A = \left| \int_a^{N_1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{N_1}^{N_2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{N_2}^{N_3} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{N_3}^{b} f(x)\,dx \right|$$

Bp: $\int_0^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$



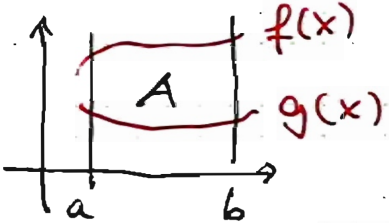
falls Fläche gefragt: $\left|\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx\right| + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx\right|$

$= \left|\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right| + \left|\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right|$

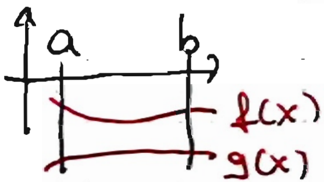
$= 1 + |-1|$

$= 2$ FE

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven:



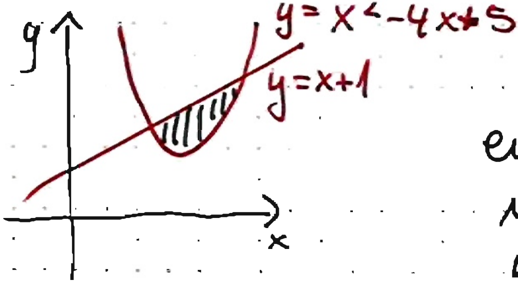
$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$



$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

! Nachdenken

Bsp:

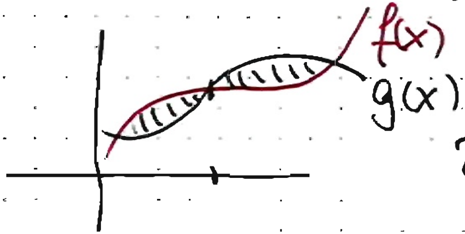


eingeschlossene Fläche

1) Schnittpunkte → Integrationsgrenzen

hier: $$\int_1^4 \left((x+1)-(x^2-4x+5)\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_1^4 = \frac{27}{6} \text{ FE}$$

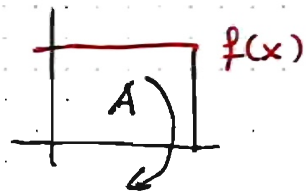
Beachten:



Zerlegung in Teilflächen $f(x) \geq g(x)$

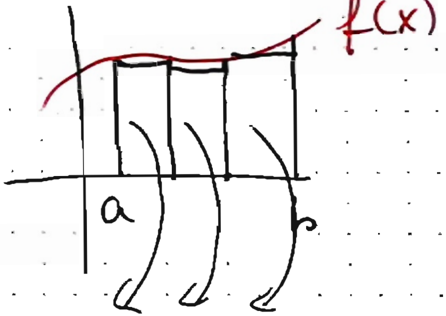
Schnittpunkt! $g(x) \geq f(x)$

2) Rotationskörper bei Drehung um x-Achse



→ Zylinder

Formelherleitung:



$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$