Wdh

Mittwoch, 11. November 2020 08:39

Wir haben kennen gelernt

	Gleichwertiges verknüpft mit
a) Aussagen Aussagenformen	$\Leftrightarrow$ (oder $\Rightarrow$)
b) Terme	$=$

zu a) Gleichungen & Ungleichungen sind Aussage(formen)

Bsp: $\underbrace{x+2=7}_{\text{Aussageform}} \Leftrightarrow x = 7-2$

zu b) $\underbrace{(x+1)^2}_{\text{Term}} = x^2+2x+1$

zu "$\Rightarrow$" $\sqrt{x+2} = 5 \quad | \ ()^2$

$\Rightarrow x+2 = 5^2$

Übung

Mittwoch, 11. November 2020 09:40

Schreibweise Mengen

Intervall	Menge	Beschreibung
$(c,-5)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid c<x<-5\}$	offenes Int. zw. c u. -5
$(-10,-8]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid -10<x\leq-8\}$	...
$(0,5)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<5\}$	offenes Int. aller reellen Zahlen zw. 0 u. 5
$(0,\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$ $=\{x\in\mathbb{R}^+\}=\mathbb{R}^+$	alle positiven reellen Zahlen (0 ist <u>keine</u> pos. Zahl)

Faktorenzerlegung

a) $x^2-25 \underset{\uparrow}{=} (x+5)(x-5) = 0$

3. Bin. Formel

$\Leftrightarrow \quad x+5=0 \quad \vee \quad x-5=0$

$\Leftrightarrow \quad x=-5 \quad \vee \quad x=5 \qquad \underline{\underline{\mathbb{L}=\{-5,5\}}}$

$\Leftrightarrow \quad x^2=25 \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{\underline{\pm 5}}$

b) $x\ln(x^2+1)+x^2\ln(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+x^2)\ln(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow x(1+x)\ln(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \quad \vee \quad x=-1 \quad \vee \quad \ln(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \quad \vee \quad x=-1 \quad \vee \quad \underbrace{x^2+1=1}_{x=0}$

$\underline{\underline{\mathbb{L}=\{0,-1\}}}$

Def. bereich: man darf 0 u. -1 einsetzen ✓

c) $x\ln(x)+x^2\ln(x^2)=0$

$\Leftrightarrow x\ln(x)+x^2\,2\ln(x)=0$

$\Leftrightarrow (x+2x^2)\ln(x)=0$

$\Leftrightarrow x(1+2x)\ln(x)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \quad \vee \quad 1+2x=0 \quad \vee \quad \ln x=0$

$\Leftrightarrow x=0 \quad \vee \quad x=-\frac{1}{2} \quad \vee \quad x=1$

Def. Bereich checken: $x=0$ und $x=-\frac{1}{2}$ dürfen NICHT in ln eingesetzt werden

$\mathbb{D}=\mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L}=\{1\}}}$

Summen

Mittwoch, 11. November 2020 09:45

Anm: Für Schleifenvariablen gilt
"Namen sind Schall u. Rauch"
(Goethe, Faust)

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2$$

Name i
oder Name k

<u>Bsp</u> $\sum_{k=1}^{50} k^4 - \sum_{k=4}^{54} (k-2)^4$

$$= 1^4 + 2^4 + \dots + 50^4$$
$$- 2^4 - \dots - 50^4 - 51^4 - 52^4$$

$$= 1^4 - 51^4 - 52^4 = \underline{-14076816}$$

Separierbare Summen

Bsp: Sei $a_k = k^2$, $k = 1, 2, 3$

$b_i = (i+1)^2$, $i = 1, 2, 3$

Was ist $\sum c_{ik} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_k b_i$?

$$\begin{array}{cccc|c|c}
 & k & 1 \quad 2 \quad 3 & & & \\
 & a_k & \boxed{1 \quad 4 \quad 9} & & b_i & i \\
(c_{ik}) = & & \begin{pmatrix} 4 & 16 & 36 \\ 9 & 36 & 81 \\ 16 & 64 & 144 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} 4 \\ 9 \\ \underline{16} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}
\end{array}$$

Nur Visualisierung

<u>Rechenweg</u>

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_k b_i = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} b_i\right)} = 14 \cdot 29$$

$$= \underline{406}$$

separ. Summen

Summen Ü

Mittwoch, 11. November 2020 10:52

Ü $\sum_{j=1}^{50} (j-1)j - \sum_{i=3}^{52} i(i+1)$

$= 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots \; 49\cdot 50$

$- (3\cdot 4 + \dots + 49\cdot 50 + 50\cdot 51 + 51\cdot 52 + 52\cdot 53)$

$= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 - (50\cdot 51 + 51\cdot 52 + 52\cdot 53)$

$= \underline{\underline{-7950}}$

Ü separierbare Summen

a) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{10} k\cdot i = \left(\sum_{k=1}^{3} k\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{10} i\right)$

$= 3 \cdot \frac{10\cdot 11}{2}$

$= 3 \cdot 55 = \underline{\underline{165}}$

b) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} \left((k\cdot i)^2 + 5\right)$

$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} (k\, i)^2 + \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} 5$

$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} k^2 \cdot i^2 + 3 \cdot 4 \cdot 5$

Anz. k-Schleifen durchläufe

$= \left(\sum_{k=1}^{3} k^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{4} i^2\right) + 60$

$= 14 \cdot 30 + 60 = \underline{\underline{480}}$

Binomial

Mittwoch, 11. November 2020 11:19

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{2!\;98!} = \frac{100\cdot 99\cdot \cancel{98!}}{2!\;\;\cancel{98!}} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1}$$

Additionstheorem $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Pascal'sches Dreieck:

$k=0$

$n=0$: 1 $\quad k=1$

$n=1$: 1 1 $\quad k=2$

$n=2$: 1 2 1

$n=3$: 1 3 3 1

$n=4$: 1 4 6 4 1

Ü Binomial

Mittwoch, 11. November 2020 11:32

Pascal-Dreieck bis $n=7$

$n=0$	1
1	1 1
2	1 2 1
	1 3 3 1
	1 4 6 4 1
	1 5 10 10 5 1
	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1

$$(a+b)^7 = \underbrace{1\cdot a^0 b^7}_{b^7} + \underbrace{7a^1b^6}_{7ab^6} + \dots$$

Vereinfachen

a) $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = \underline{\underline{(n+1)n}}$$

b) $$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n}{n} = \frac{1}{n!} + \frac{n}{n!}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1+n}{n!}}}$$

$$(n+1)! = (n+1)\,n\,(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$$

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$$

$$(5+1)! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$(5-1)! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$