

können weggelassen werden.

Sind dann die restlichen Gleichungen linear unabhängig, so besitzt das LGS eine eindeutige Lösung.

Können weitere linear abhängige Gleichungen eliminiert werden, so ist das LGS unterbestimmt und es gibt unendlich viele Lösungen.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\
 & \quad \quad x_1 \quad \quad + x_3 + 2x_4 = 3 \\
 & \quad \quad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\
 & -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 16
 \end{aligned}$$

Zugehörige, erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array} \right) \cdot (-1)$$

Auswahl Pivotzeile und Pivotspalte (1. Zeile, 1. Spalte)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array} \right)$$

- 1. Zeile
- 3 × 1. Zeile
+ 2 × 1. Zeile

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -8 & 14 \end{array} \right) : (-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -8 & 14 \end{array} \right)$$

Auswahl Pivotzeile und Pivotspalte (2. Zeile, 2. Spalte)
+ 4 × 2. Zeile
- 10 × 2. Zeile

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array} \right) :3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 6 & 17 & 34 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Auswahl Pivotzeile} \\ \text{und Pivotspalte} \\ -6 \times 3. \text{ Zeile (3. Zeile, 3. Spalte)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 42 \end{array} \right) :21$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Aus der Treppensteinform kann man direkt die Lösung: $x_4 = 2$ ablesen

$$x_4 = 2 \text{ eingesetzt in III: } x_3 - \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_4 = 2 \text{ und } x_3 = 0 \text{ in II: } x_2 - 1 \cdot 0 - \frac{5}{2} \cdot 2 = -2 \Rightarrow x_2 = 3$$

$$x_4 = 2, x_3 = 0 \text{ und } x_2 = 3 \text{ in I: } x_1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Die Lösungen des LGS lauten: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 2$

2) Historische Aufgabe

Formulieren Sie das LGS für folgendes Problem:

Drei Reisende finden unterwegs einen Ranzen mit 73 Gulden.

Sie stellen fest, dass diese 73 Gulden zusammen mit der Barschaft der ersten beiden das Doppelte dessen sind, was der erste und dritte und der zweite und dritte gemeinsam bei sich haben.

Diese 73 Gulden ergeben aber auch mit dem Besitz des ersten und dritten das Dreifache dessen, was der zweite und dritte und der erste und zweite mit sich führen.

Und schliesslich ergeben diese 73 Gulden zusammen mit der Barschaft des zweiten und dritten das Viefache dessen, was der erste und zweite und der erste und dritte zusammen bei sich tragen. Wie viele Gulden besitzt jeder der drei Reisenden?

Auswertung der Informationen

- 3 Unbekannte : x_1 : Barschaft des 1. Reisenden
 x_2 : Barschaft des 2. Reisenden
 x_3 : Barschaft des 3. Reisenden

Aufstellen der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I: } & 73 + x_1 + x_2 = 2(x_1 + x_3 + x_2 + x_3) \\ \text{II: } & 73 + x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_3 + x_1 + x_2) \\ \text{III: } & 73 + x_2 + x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_1 + x_3) \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Variablen und Umstellen liefert folgendes Ausgangsgleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 73 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 73 \\ 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 73 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 2 & 6 & 2 & 73 \\ 8 & 3 & 3 & 73 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{LA}]{\text{Gauß'sches}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 73 \\ 0 & 4 & -6 & 73 \\ 0 & 0 & -365 & -602,25 \end{array} \right)$$

Lösungen: Basschaft $x_1 = 0.5$
 Basschaft $x_2 = 6.5$
 Basschaft $x_3 = 16.5$

Hinweis auf Anwendungsbereiche linearer Gleichungssysteme: Input/Output-Analyse

Eine "Wirtschaft" wird als System wechselseitig abhängiger Sektoren, die einmal Abnehmer, ein anderes Mal Abgeber von "Produkten" sein können. Diese Input/Output-Flüsse werden mit Hilfe LGS beschrieben.

Lineare Gleichungssysteme und die Inverse der Koeffizientenmatrix

Zur Erinnerung: A^{-1} Inverse von $A \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Die Umformungsmöglichkeiten (äquivalente Umformungen) an der erweiterten Koeffizientenmatrix eines LGS können nun genutzt werden, um die Inverse einer Matrix zu berechnen.

Bem.: die Inverse einer Matrix existiert nur für quadratische, reguläre Matrizen, d. h. Matrizen mit vollem Rang.

Geg.: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ LGS

Falls A quadratisch und regulär, dann besitzt das LGS eine eindeutige Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$$

Diese Lösung kann wie das Ausgangs LGS als Matrixgleichung geschrieben werden: $E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$

$$\text{also } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$$

Äquivalente Umformungen transformieren die erweiterte Koeffizientenmatrix in die "erweiterte" Einheitsmatrix, aus der die Lösungen des LGS direkt abzulesen sind. Aus A ist E geworden.

Angenommen A^{-1} ist bekannt (existiert auf alle Fälle, da A quadratisch und regulär)

$$\text{Dann ist } A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

$$\text{und } A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{also } E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \text{und } E \cdot \vec{x} = \vec{b}^* \end{array} \right\} \Rightarrow A^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{b}^*$$

Die Lösung eines GS erhält man durch Multiplikation von links der Inversen an den Vektor $\vec{b}$.

Aus $\vec{b}^* = A^{-1} \cdot \vec{b}$ lässt sich ein Weg ableiten, A^{-1} zu berechnen:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
j-te Spalte der Einheitsmatrix E

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{e}_j$$

$\downarrow$
das Ergebnis ist genau die j-te Spalte der Inversen.

Die Lösung eines LGS mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_j$ als Absolutglied ist gerade die j-te Spalte der Inversen der Koeffizientenmatrix.

Um alle Spalten der Inversen A^{-1} zu erhalten, löst man $A \vec{x} = \vec{e}_j$ für $j = 1, \dots, m$

bzw. man löst "simultan"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix$$

$\downarrow$
 E

$\downarrow$
 A^{-1}

Alle äquivalenten Umformungen, die an der Matrix A vorgenommen werden, um sie in die Einheitsmatrix zu überführen, werden simultan an E durchgeführt, am Ende ist aus E A^{-1} geworden

Bp.: Geg. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Gesucht A^{-1}

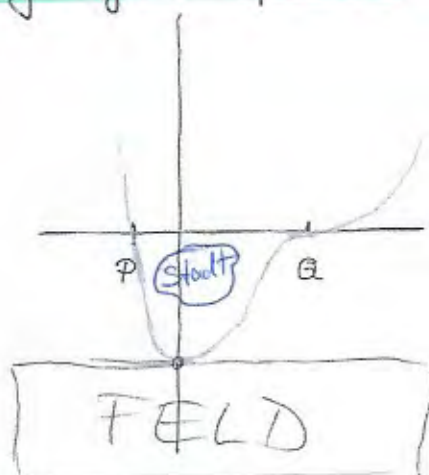
	A	E
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Zeile $\times 2$ 3. Zeile - 2 $\times$ 1. Zeile	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Zeile $+ 3 \times$ 2. Zeile	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1. Zeile - 3. Zeile 2. Zeile - $1/2$ 3. Zeile 3. Zeile $\times 2$ = 3.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$
1. Zeile - 2 $\times$ 2. Zeile	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
	E	A^{-1}

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fazit: Ein LGS mit m Gleichungen und m Unbekannten besitzt eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$
 $\text{rg}(A) = m$, A regulär, A besitzt eine Inverse

Lösung Eingangsbeispiel:

Skizze:



$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$PP(-1,0) : a - b + c - d + e = 0$$

$$PP(3,0) : 81a + 27b + 9c + 3d + e = 0$$

$$f'(3) = 0 : 108a + 27b + 6c = 0$$

$$f'(0) = 0 : d = 0$$

$$f(0) = -3 : e = -3$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 81 & 27 & 9 \\ 108 & 27 & 6 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & a & c \\ -1 & 1 & 1 \\ 27 & 81 & 9 \\ 27 & 108 & 6 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 27 & 81 & 9 \\ 27 & 108 & 6 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-27 \times 1.2 \\ -27 \times 1.2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 108 & 36 \\ 0 & 135 & 33 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ 84 \\ 81 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{:108 \\ :135}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{36}{108} \\ 0 & 1 & \frac{33}{135} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ \frac{84}{108} \\ \frac{81}{135} \end{vmatrix} \xrightarrow{-2.2.} \begin{pmatrix} b & a & c \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{36}{108} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{45} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 \\ \frac{84}{108} \\ \frac{81}{135} \\ -\frac{8}{45} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{4}{45} c = -\frac{8}{45} \Leftrightarrow c = 2$$

$$a + \frac{36}{108} \cdot 2 = \frac{84}{108} \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$b = -3 + \frac{1}{9} + 2 = -\frac{8}{9}$$

$$\text{Lösung: } \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x^2 - 3 = f(x)$$

Determinanten

Erinnerung: Bei der Berechnung der Inversen einer (2×2) -Matrix (Blatt 32) konnte man aus allen Gleichungen den Ausdruck $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ausklammern, die Inverse A^{-1} konnte wie folgt dargestellt werden:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

D ist eine reelle Zahl, die sich aus den Koeffizienten der Matrix berechnen lässt, und zwar aus allen Koeffizienten.

Diese Kennzahl heißt **Determinante**

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

heißt die Determinante von A

Sei $A = (a_{11})$, dann ist $\det A = a_{11}$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann ist $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, dann ist

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Schauen wir uns diesen Ausdruck etwas genauer an:

6 Summanden mit jeweils 3 Faktoren, die jeweils aus unterschiedlichen Zeilen stammen. (grün unterstrichen)

Wie die zweiten Indizes zu wählen sind, wird durch

die allgemeine Definition klar:

Def. (Determinante einer $(m \times m)$ -Matrix) (m -reihige Determinante)

Sei A eine $(m \times m)$ -Matrix, dann ist

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{mj_m}$$

$P(j)$: Permutationen des zweiten Index j (Spaltenindex)

$I(j)$: Zahl der Inversionen der jeweiligen Permutation, bestimmt das Vorzeichen des Summanden.

[Def. (Inversion) : Zwei Elemente einer Permutation bilden eine Inversion, wenn sie nicht in ihrer natürlichen Anordnung stehen]

Bem: Wir betrachten die Determinante einer (3×3) -Matrix
(3-reihige Determinante)

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Anzahl
Inversionen
des zweiten
Index

0 2 2 1 1 1

Bem: 3-reihige Determinante : 6 Summanden mit jeweils
(3!) 3 Faktoren

4-reihige Determinante : 24 Summanden mit jeweils
(4!) 4 Faktoren

5-reihige Determinante : 120 Summanden mit jeweils
(5!) 5 Faktoren

Man benötigt dringend Regeln, die das Berechnen von Determinanten vereinfachen.

(59)

Regel zur Berechnung 3-reihiger Determinanten:

Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

man fügt die ersten beiden Spalten an (grün) und bildet die aus drei Faktoren bestehenden 6 Summanden
"diagonal" rot: +
blau: -

Produkte der Hauptdiagonalen:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

minus Produkte der Nebendiagonalen:

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Bp: Berechnen Sie: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

Ergebnis: -83

Eigenschaften von Determinanten, die später die Rechnung für höherreihige Determinanten erleichtern:

- 1) Vertauschen zweier benachbarter Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante
Vertauscht man mehrere Zeilen, so ändert sich das Vorzeichen nur, wenn eine ungerade Anzahl Vertauschungen vorgenommen wurde. $\det A_{P(i)} = (-1)^{I(i)} \det A$
- 2) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \det A$

dagegen: $\det (\lambda \cdot A) = \lambda^m \cdot \det A$