Hinweis auf Integrationsmethoden, die im Rahmen dieser Vorlesung nicht vorgestellt werden:

- Integration echt gebrochenrationaler Funktionen mit Hilfe der: Partialbruchzerlegung
- Integration nicht in endlich vielen Schritten durch Anwendung der bisherigen Regeln durchführbar, also nicht geschlossen lösbare Integrale werden mittels numerischer Verfahren gelöst:
  - Rechtecksapproximation
  - Trapezregel
  - Simpson-Regel

Uneigentliche Integrale

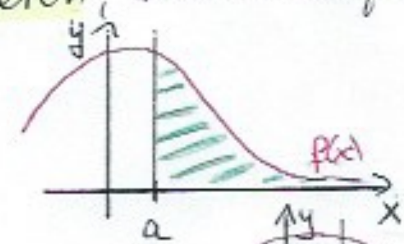
Bislang hat man bei den bestimmten Integralen vorausgesetzt, dass sowohl der Integrand als auch die Integrationsgrenzen beschränkt sind.

Was ist mit Integralen, wo eine oder gar beide Integrationsgrenzen $+\infty$, $-\infty$, bzw. $-\infty$ und $+\infty$ sind?

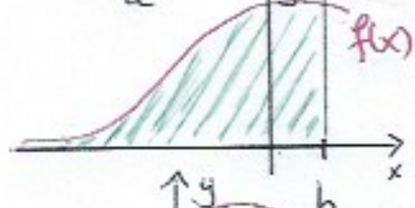
Formal: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Def: Falls die Grenzwerte existieren, dann heißen

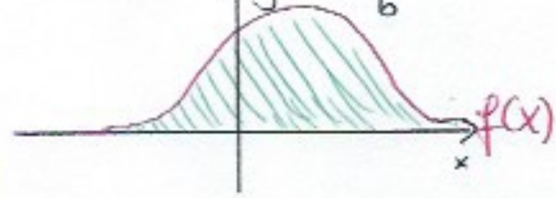
$$\lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} f(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$



$$\lim_{a_n \to -\infty} \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$



$$\lim_{\substack{a_n \to -\infty \\ b_n \to +\infty}} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$



die uneigentlichen Integrale

Voraussetzung hierfür ist, dass

f auf $[a, b_n]$ mit $b_n \to \infty$

bzw. f auf $[a_n, b]$ mit $a_n \to -\infty$

bzw. f auf $[a_n, b_n]$ mit $a_n \to -\infty$, $b_n \to \infty$

jeweils integrierbar sind

Die uneigentlichen Integrale heißen dann konvergent.

Bp.: 1) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$

Man berechnet zunächst: $\int\limits_1^b \frac{1}{x^4}\,dx = \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^b$

$$= \frac{b^{-3}}{-3} + \frac{1^{-3}}{3}$$

$$= -\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3}$$

Betrachte: $\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{3}\right)$

$$= \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b^3}\right)}_{\to 0} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Das uneigentliche Integral konvergiert und besitzt den Grenzwert $\frac{1}{3}$.

2) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^{-x}\,dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b} + e^0\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{e^b}}_{\to 0} + 1\right) = 1$$

Es ist: $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

3) $\int_0^\infty x^2\,dx$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^3}{3}-0\right] = \infty$$

Das uneigentliche Integral konvergiert nicht, es ist divergent, „es wächst über alle Maßen", die Fläche ist unendlich groß.

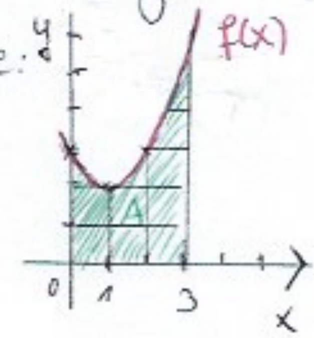
Anwendungsgebiete der Integralrechnung

1) Flächeninhalt

Bei der Herleitung des bestimmten Integrals wurde die Berechnung des Flächeninhalts unter der Kurve auf einem Intervall $[a,b]$ mit Hilfe von Ober- und Untersummen (Rechtecksflächen) erklärt. Diese geometrische Interpretation ist nur zulässig, wenn der Integrand auf dem gesamten Integrationsintervall die Bedingung $f(x) \geq 0$ erfüllt. (war bei der Herleitung auch vorausgesetzt)

Bp: Gesucht ist der Flächeninhalt A, der vom Funktionsgraphen $f(x) = x^2 - 2x + 3$ (verschobene Parabel), der x-Achse und den Parallelen $x = 0$ und $x = 3$ begrenzt wird.

Skizze:



Auf $[0,3]$ gilt: $f(x) \geq 0$

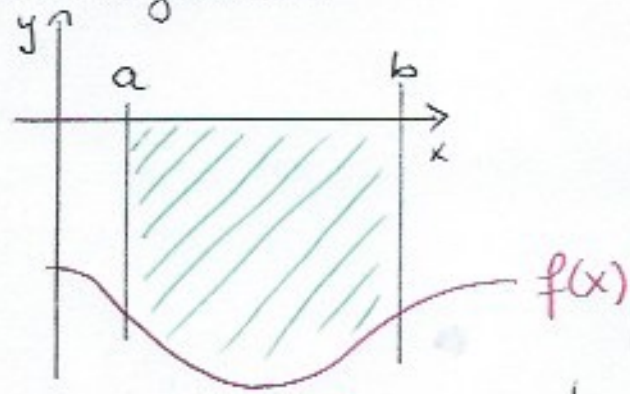
$$A = \int_0^3 (x^2-2x+3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_0^3$$

$$= \left(\frac{27}{3} - 9 + 9 - 0\right) = \frac{27}{3} = 9 \text{ FE}$$

(„ungefähre" Kontrolle über Skizze)

Verläuft die Kurve auf dem gesamten Integrationsintervall unterhalb der x-Achse, d.h. die Funktion nimmt auf [a,b] nur negative Funktionswerte an, so wird das bestimmte Integral einen negativen Wert ergeben. Um die Maßzahl für den Flächeninhalt darzustellen, nimmt man den Betrag des Ergebnisses.

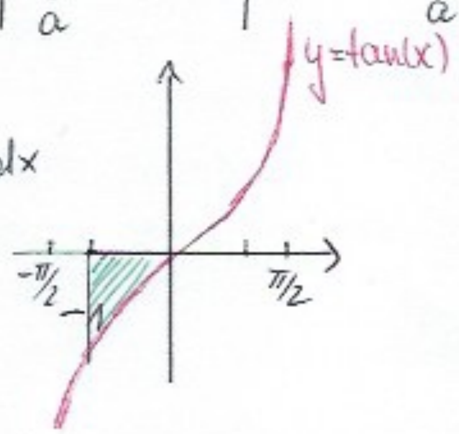
Skizze:



$f(x) \leq 0$ auf $[a,b]$

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Bp: $\int_{-1}^{0} \tan(x)\,dx$

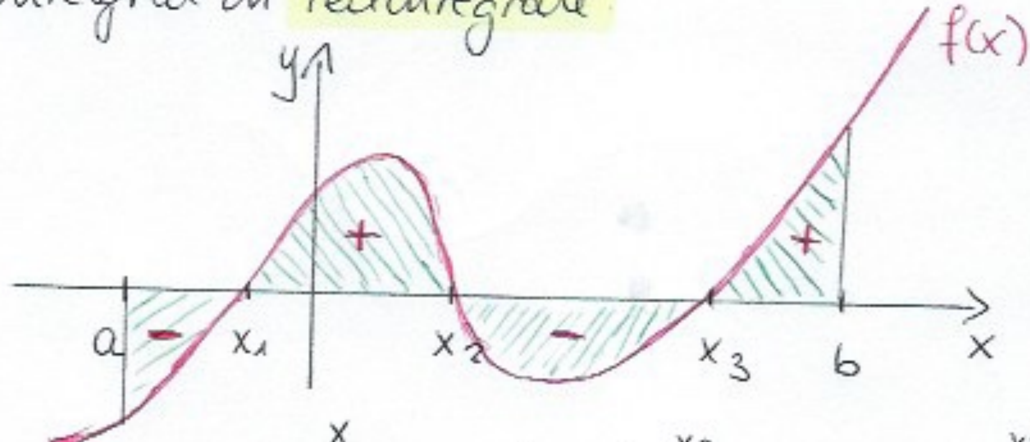


$$A = \left| \int_{-1}^{0} \tan(x)\,dx \right| = \left| -\ln|\cos(x)| \,\Big]_{-1}^{0} \right|$$

Blatt 84 Bp.3

$$= \left| -\ln|\cos(0)| + \ln|\cos(1)| \right|$$
$$= |-\ln(1) + \ln(0.54)|$$
$$= |-0 + \ln(0.54)|$$
$$= |-0{,}616| = 0{,}616 \text{ FE}$$

Besitzt die Funktion im Integrationsintervall eine oder mehrere Nullstellen, so verläuft die Kurve teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse. Bei der reinen Bestimmung des bestimmten Integrals heben sich die positiven Flächen (oberhalb der x-Achse) und die negativen Flächen (unterhalb der x-Achse) gegenseitig auf. Interessiert der Flächeninhalt, dann sollten zunächst die Nullstellen bestimmt werden und man zerlegt das Integral in Teilintegrale

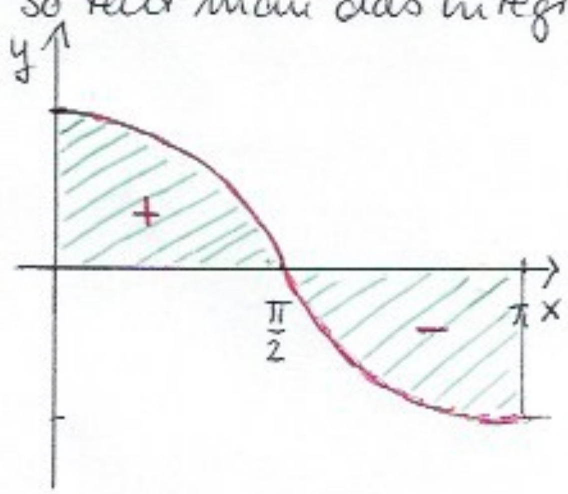


$$\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^{x} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)\,dx\right|$$

Man darf ohne weiteres die Summe der Beträge aller Teilflächen nehmen, da oft nicht bekannt ist, wo die Funktion oberhalb und wo sie unterhalb der x-Achse verläuft.

Bsp.: 1) $\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = \left[\sin(x)\right]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$

Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt bestimmen, so teilt man das Integral in Teilintegrale auf:



1 Nullstelle im Integrationsintervall

$$\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = \left|\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx\right| + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\sin(x)\right]_0^{\pi/2}\right| + \left|\left[\sin(x)\right]_{\pi/2}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\sin(\pi/2) - \sin(0)\right| + \left|\sin(\pi) - \sin(\pi/2)\right|$$

$$= |1 - 0| + |0 - 1| = 1 + 1 = 2$$

2) Es soll der Flächeninhalt berechnet werden, der auf dem Intervall $[-2.5; 3]$ von der Kurve $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

Zunächst muss man mögliche Nullstellen der Funktion auf $[-2{,}5; 3]$ bestimmen:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

$x = 1$ ist Nullstelle (Erraten)

Weitere Nullstellen durch Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 3x^2 - 6x + 8 : (x-1) = x^2 - 2x - 8 \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad -2x^2 - 6x \\
\quad \underline{-2x^2 + 2x} \\
\qquad\quad -8x + 8 \\
\qquad\quad \underline{-8x + 8} \\
\qquad\qquad " \quad "
\end{array}
$$

Lösen der quadratischen Gleichung: $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow x_1 = 4,\quad x_2 = -2$$

Nur $x_2 = -2$ liegt im Integrationsbereich.

Somit ergibt sich mit der schon erratenen Nullstelle $x = 1$ folgende Aufteilung des Intervalls in Teilintervalle:

$$\int_{-2.5}^{3} f(x)\,dx = \underbrace{\left|\int_{-2.5}^{-2} f(x)\,dx\right|}_{I_1} + \underbrace{\left|\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\right|}_{I_2} + \underbrace{\left|\int_{1}^{3} f(x)\,dx\right|}_{I_3}$$

Berechnung der Teilintegrale:

$$I_1: \int_{-2.5}^{-2} (x^3-3x^2-6x+8)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+8x\right]_{-2.5}^{-2}$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}-x^3-3x^2+8x\right]_{-2.5}^{-2} = \left(\frac{16}{4}+8-12-16\right)-\left(\frac{39.06}{4}+15.62-18.75-20\right)$$

$$= -2.635$$

$$I_2 = \int_{-2}^{1} (x^3-3x^2-6x+8)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-x^3-3x^2+8x\right]_{-2}^{1}$$

$$= 20.25$$

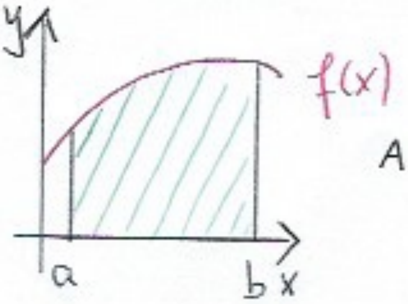
$$I_3 = \int_{1}^{3} (x^3-3x^2+6x+8)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-x^3-3x^2+8x\right]_{1}^{3}$$

$$= -14$$

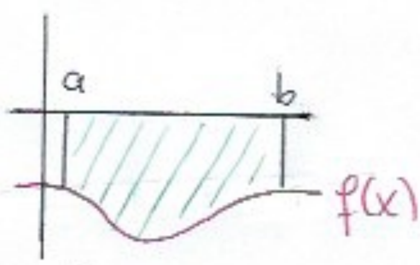
Gesamtfläche $A = |I_1| + |I_2| + |I_3| = 2.635 + 20.25 + 14$

$= 36.855\ FE$

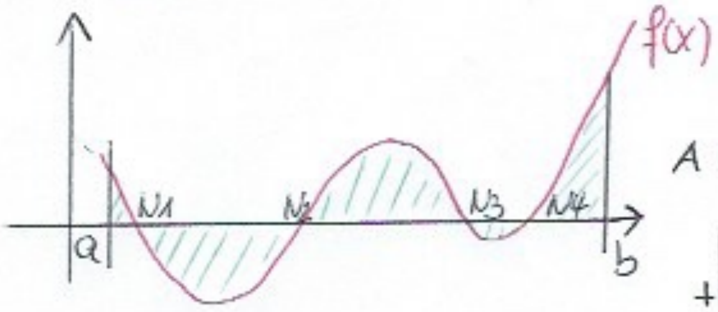
Zusammenfassung Flächenberechnung mit dem bestimmten Integral



$$A = \int_a^b f(x)\,dx \quad f(x) \geq 0 \text{ auf } [a,b]$$



$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \quad f(x) \leq 0 \text{ auf } [a,b]$$

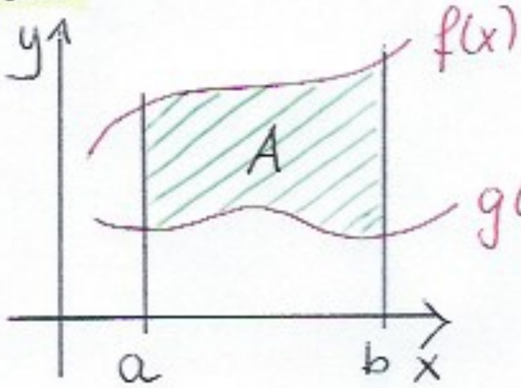


$$A = \left|\int_a^{N1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{N1}^{N2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{N2}^{N3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{N3}^{N4} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{N4}^{b} f(x)\,dx\right|$$

2) Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

Häufig benötigt man den Flächeninhalt, der von zwei Kurvenstücken oben und unten begrenzt ist. Dabei muss genau darauf geachtet werden, wo die Kurven verlaufen. Man unterscheidet folgende Fälle:

1. Fall

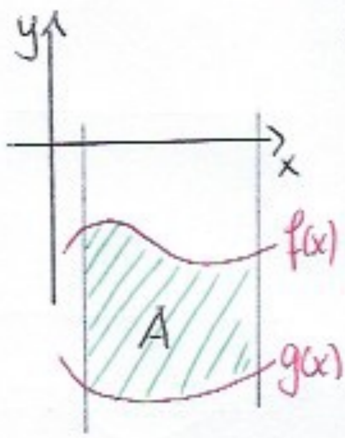


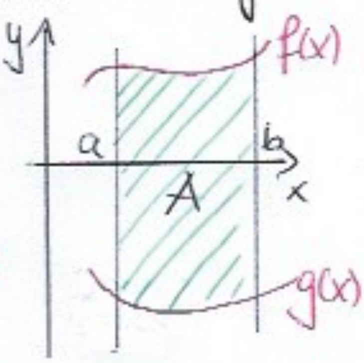
$f(x) \geq g(x)$ auf $[a,b]$

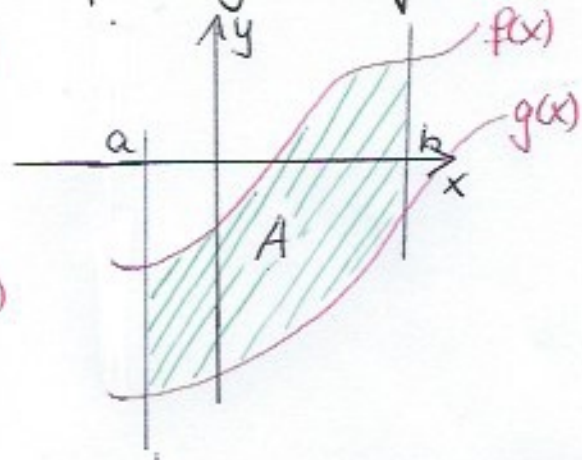
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Frage: Wie lautet das Integral, wenn zwar $f(x) \geq g(x)$ auf $[a,b]$ gilt, ein Kurvenast in ersten Quadranten, einer im vierten Quadranten liegt, oder beide Kurvenabschnitte liegen im 4. Quadranten

Antwort: $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ kann immer angewendet werden, es muss nur gelten: $f(x) \geq g(x)$ auf $[a,b]$



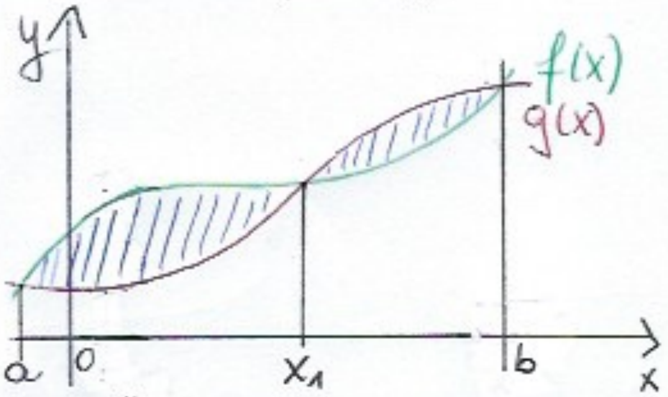




$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

2. Fall

Auf dem Integrationsintervall schneiden sich die Kurven, so dass auf einem Teilintervall $f(x) \geq g(x)$ auf einem anderen Teilintervall $f(x) \leq g(x)$ gilt.



Es soll die Fläche berechnet werden, die von $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird

Es müssen die Schnittpunkte der Kurven berechnet werden, die im Integrationsintervall liegen. Bei einer Fragestellung der eingeschlossenen Fläche sind alle Schnittpunkte zu berechnen.

$$A = \underbrace{\int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx}_{\text{da } f(x) \geq g(x) \text{ auf } [a, x_1]} + \underbrace{\int_{x_1}^{b} (g(x) - f(x))\,dx}_{\text{da } g(x) \geq f(x) \text{ auf } [x_1, b]}$$

$$\text{bzw. } A = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx \right| + \left| \int_{x_1}^{b} (f(x) - g(x))\,dx \right|$$

Beispiele zu Fall 1 und Fall 2:

1) Berechnen Sie die Fläche die von der Parabel $y = x^2 - 4x + 5$ und der Geraden $y = x + 1$ eingeschlossen wird

Die Schnittpunkte der beiden Funktionen bestimmen die Integrationsgrenzen:

Schnittpunkte: $x^2 - 4x + 5 = x + 1$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

Integrationsgrenzen : 1 und 4

Es gilt $x+1 \geq x^2-4x+5$ auf $[1,4]$

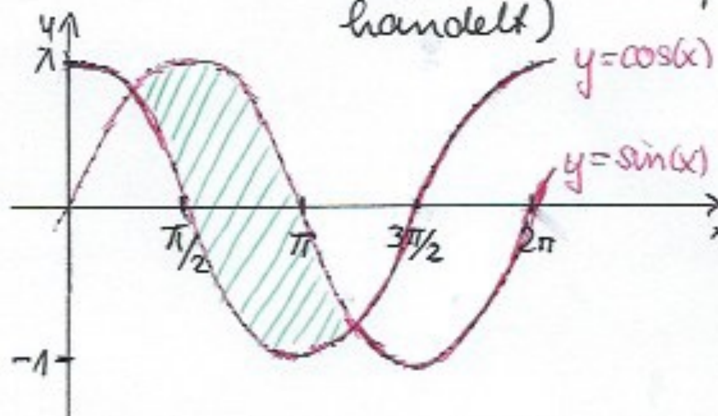
$$A = \int_1^4 \left(x+1-(x^2-4x+5)\right) dx = \int_1^4 (-x^2+5x-4)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_1^4 = -\frac{64}{3}+\frac{80}{2}-16+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4$$

$$= \frac{27}{6}\,\text{FE}$$

2) Berechnen Sie ein Flächenstück, das $y=\sin(x)$ und $y=\cos(x)$ einschließen (Bem: diese Flächenstücke wiederholen sich, da es sich um periodische Funktionen handelt)

Skizze:



Berechnung der "ersten beiden" Schnittpunkte:

$\cos(x) = \sin(x)$ bei $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{\pi}{4}+\pi = \frac{5}{4}\pi$

(allgemein: $x_i = \frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$)

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x)-\cos(x))\,dx$$

$$= \left[-\cos(x)-\sin(x)\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = -\cos(\tfrac{5}{4}\pi)-\sin(\tfrac{5}{4}\pi)+\cos(\tfrac{\pi}{4})+\sin(\tfrac{\pi}{4})$$

$$= -\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)-\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

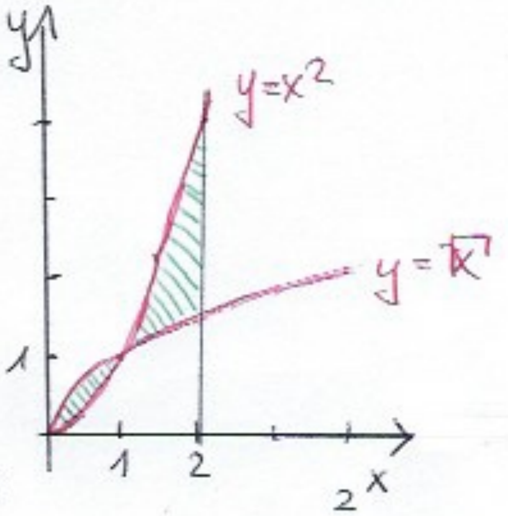
$$= 2\sqrt{2}\,\text{FE}$$

3) Es soll ein Flächenstück berechnet werden, das von den Kurven $y=x^2$ und $y=\sqrt{x}$, sowie der Parallelen zur y-Achse im Abstand $x=2$ eingeschlossen wird. (untere Grenze $x=0$)

Man prüft auf Schnittpunkte:

$$x^2 = \sqrt{x} \iff x = 1$$

Skizze:



$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})\,dx$$

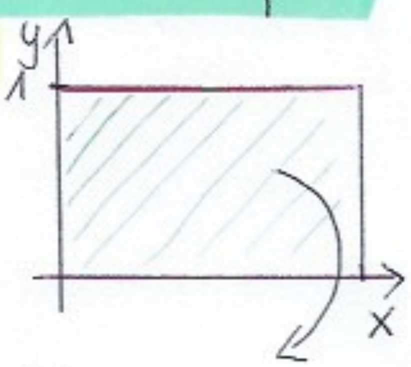
$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

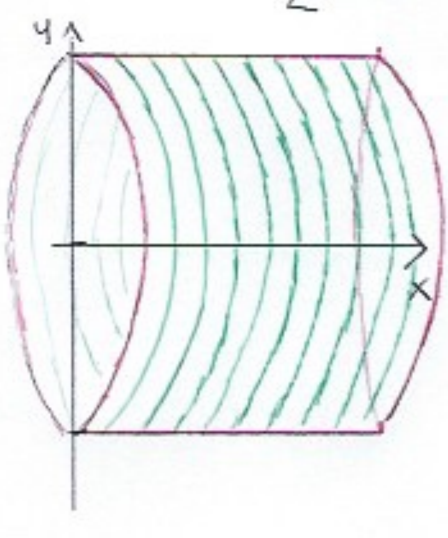
$$= \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\cdot\sqrt{2} \approx 1.447\ \text{FE}$$

3) Rotationskörper

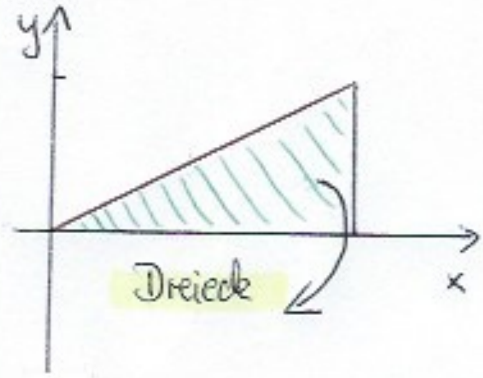
Bp.:

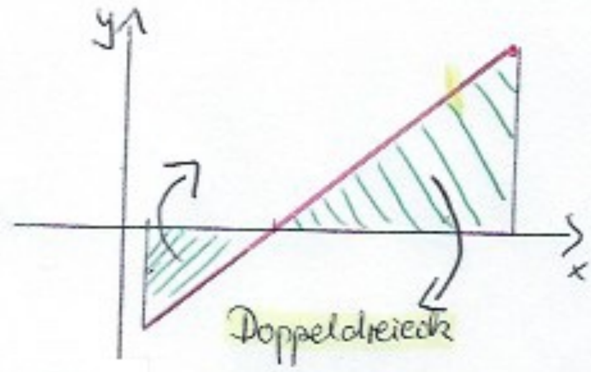


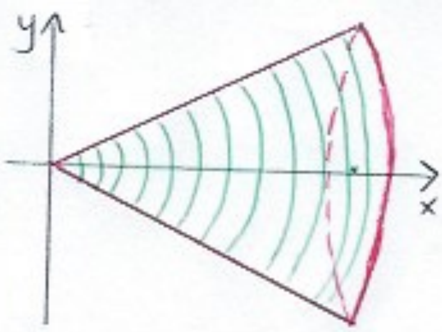
Die Rechtecksfläche rotiere um die x-Achse, was für ein Rotationskörper entsteht?



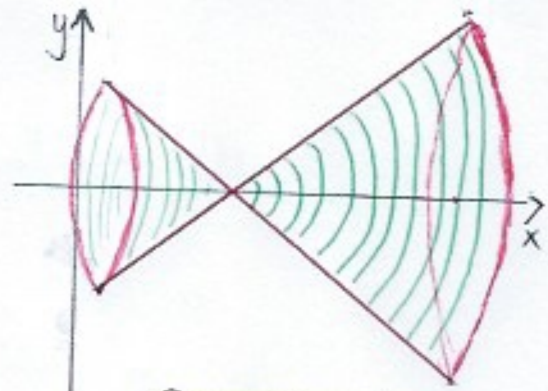
Es entsteht ein Zylinder



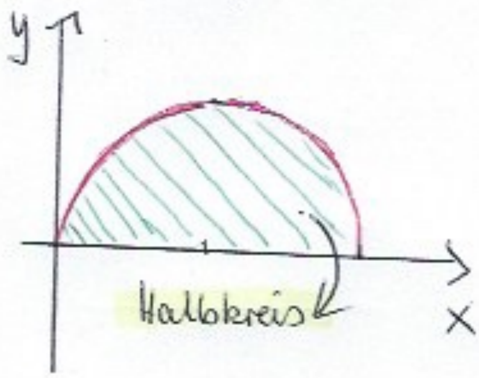


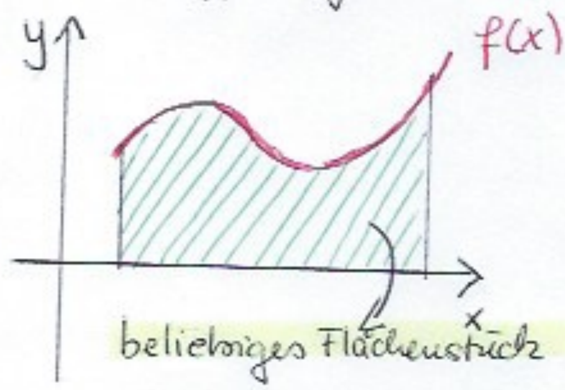


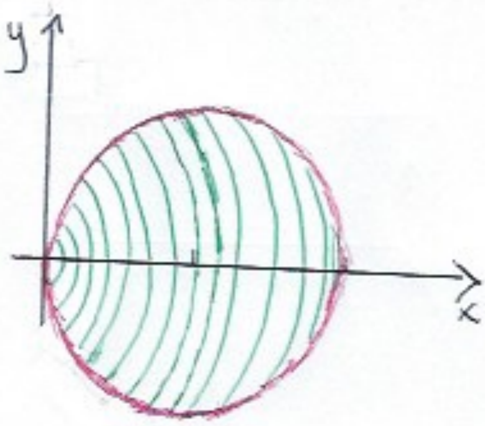
Kegel



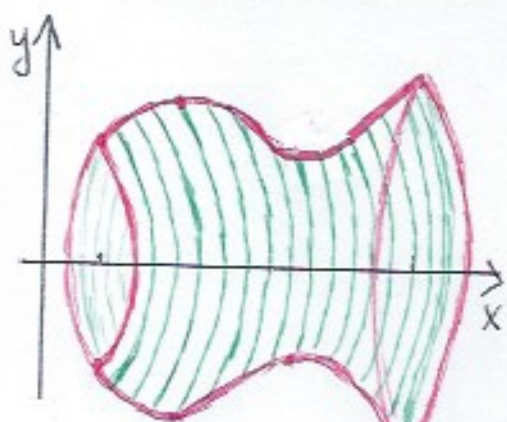
Doppelkegel







Kugel



"eine Art Vase"

Rotationskörper sind überall aus dem Alltag bekannt:
Vasen, Gläser, gedrechselte Figuren....

Die Herleitung der Formel (Integral) verläuft ähnlich wie bei der Herleitung des bestimmten Integrals.

Frage: Wie wurde das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ hergeleitet?

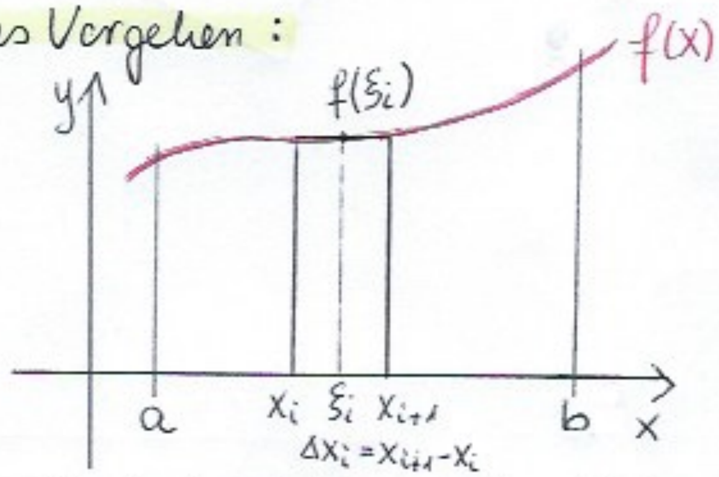
Antwort: Die unbekannte Fläche wurde durch eine Summe von Rechtecksflächen, die immer "dünner" wurden (Grenzwert) approximiert.

Frage: Wie kann man dieses Vorgehen auf die Rotation von Flächen übertragen?

Antwort: Rechtecke, die rotieren, erzeugen Zylinder, dünne Rechtecke erzeugen dünne Zylinderscheiben, diese werden summiert.

Genaues Vorgehen:

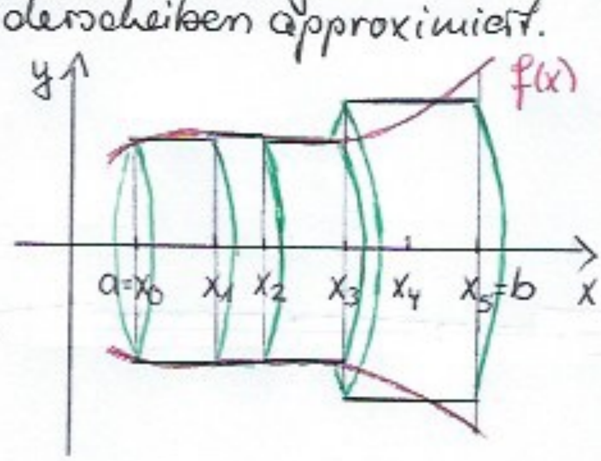
Geg.: $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$



Man zerlegt das Intervall $[a,b]$ in n Teilintervalle. Der Übersichtlichkeit halber wird nur das i-te Teilintervall eingezeichnet.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

In jedem Teilintervall wird eine Zwischenstelle ξ_i (nicht notwendigerweise die Intervallmitte. Die Höhe des Teilrechtecks ist $f(\xi_i)$. Diese Rechtecksfläche rotiere um die x-Achse und erzeugt eine Zylinderscheibe. Der gesamte Rotationskörper wird somit durch n Zylinderscheiben approximiert.



Berechnung des Volumens der i-ten Zylinderscheibe:

$$\Delta V_i = \underbrace{\pi \cdot f(\xi_i)^2}_{\text{Grundfläche des Zylinders}} \cdot \underbrace{\Delta x_i}_{\text{Höhe des Zylinders}}$$

Das Volumen der übrigen $(n-1)$ Zylinderscheiben errechnet sich in der gleichen Weise. Das Gesamtvolumen ergibt sich durch Summation der Einzelvolumen:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(\xi_i)]^2 (x_i - x_{i-1})$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

f sei auf $[a,b]$ stetig, damit ist auch $\pi \cdot f^2$ auf $[a,b]$ stetig.
Es existiert daher der Grenzwert

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

$$= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Def.: f stetig auf $[a,b]$
Die Fläche, die von der Kurve $f(x)$ auf $[a,b]$ und der x-Achse eingeschlossen wird, rotiere um die x-Achse. Das Volumen des Rotationskörpers wird über folgende Integralformel berechnet:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Bem: Eine Merkhilfe für diese Formel:
Summe von unendlich dünnen (= infinitesimal dünnen) Zylinderscheiben.

Bem: Man kann auch Rotation um die y-Achse betrachten:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Die jeweilige Zylinderhöhe wird durch die nach x aufgelösten Funktionswerte $x = g(y)$ angegeben.

Bem: Auf die Rotation um die y-Achse soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Beispiele für die Berechnung von Rotationsvolumina (x-Achse)

1) $y = \sin(x)$ rotiere auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ um die x-Achse

Skizze:

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} [\sin(x)]^2 dx$$ Integrationsregel?

partielle Integration mit $f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$
$g'(x) = \sin(x)$ $g(x) = -\cos(x)$

$$\int [\sin(x)]^2 dx = -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int \cos(x) \cdot \cos(x) dx$$ (*)

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 dx - \int \sin^2(x) dx$$

$$2 \int \sin^2(x) dx = -\sin(x) \cdot \cos(x) + x$$

$$\Rightarrow \int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cdot \cos(x))$$

Damit $V = \pi \left[\frac{1}{2}(x - \sin(x) \cdot \cos(x)) \right]_0^{\pi/2}$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 + \sin(0) \cdot \cos(0)\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \text{ VE}$$

(*) Trigonometrischer Pythagoras:
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

2) $y = \sqrt{4-x^2}$ auf $[-2,2]$

Halbkreis um 0 mit Radius 2 rotiere um die x-Achse und erzeugt eine Kugel, gesucht ist das Volumen der Kugel.

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} (4-x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \pi\left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) = \pi\left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{\pi \cdot 32}{3}$$

[Allgemeines Kugelvolumen : $V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$] $= \frac{4}{3} \cdot 2^3 \cdot \pi$

Bem: Durch das erforderliche Quadrieren der Funktionsgleichung in der Volumenformel entstehen sehr schnell komplizierte Integrale, die mitunter nicht mehr ganz einfach zu lösen sind.

Hinweis auf weitere Anwendungsgebiete, die mit der Integration gelöst werden:

Bogenlänge $s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

Länge des Kurvenstücks über dem Intervall $[a,b]$

Mantelfläche eines Rotationskörpers (Drehung um die x-Achse)

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Schwerpunkte (nur erwähnt)

ENDE