Übungsblatt 2

Summen

Aufgabe 2.1 Rechnen mit Summen

a) Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

$$(i) \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2n \cdot 2(n+1)}$$

$$(ii) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots - \frac{1}{100^2}$$

b) Berechnen Sie folgende Summen

$$(i) \sum_{k=1}^{10} (5k + 7m)$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{100} (3k + 5) \quad (\text{Hinweis: Was ist } \sum_{k=1}^{100} k ? \rightarrow \text{Formelsammlung oder geschickte Umformung!})$$

c) Man berechne $\sum_{k=1}^{201} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{204} \frac{1}{k-2}$

Aufgabe 2.2 Doppelsummen

Berechnen Sie

$$a) \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=3}^4 (k-2) \cdot i, \quad b) \sum_{k=1}^{10} \sum_{i=-5}^5 [\ln(k^2 + k) \cdot i],$$

$$c) \sum_{m=2}^6 \sum_{n=0}^{39} (mn - 2m - 4)$$

Aufgabe 2.3 Pascal'sches Dreieck

Stellen Sie das Pascal'sche Dreieck bis $n=6$ auf und berechnen Sie damit $(2-c)^6$.

Folgen

Aufgabe 2.4 Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

Bestimmen Sie die Grenzwerte g der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$a1) a_n = \frac{1-5n^2}{1-8n^2} \quad a2) a_n = \left(7 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right) \quad a3) a_k = \left(\frac{1-2k}{4k+2\sqrt{k}} \right)^3$$

$$a4) a_n = \frac{9 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n/2} + 50 \cdot 10^{2n-1}}$$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 01./02.12.20 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

b) $a_n = n(\ln(n) - \ln(n+3))$ Hinweis: Benutzen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

c) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2} - \sqrt{2k-3}}$ d) $a_k = \sqrt{k+2} + \sqrt{k+5}$ e) $a_k = \sqrt{k+2} - \sqrt{k}$

Aufgabe 2.5 Weitere Grenzwerte

Berechnen Sie den Grenzwert:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{1+4n} - \frac{n^2}{2n-2} \right)$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{2}}{n(n-2)} + \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{2n^2}{2n-1} \right) \right)$

Aufgabe 2.6 Noch mehr Grenzwerte

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+2n^2-1}+2n^2+1}{n^2-1} \right)$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^6-1}{n^7} \cdot \left(1 + \frac{7n^3-2n^2}{1-n^3} \right) \right)$

Aufgabe 2.7 Fixpunkt-Iteration

Bestimmen Sie mittels Fixpunkt-Iteration² eine näherungsweise Lösung der nachfolgenden **transzendenten Gleichungen**:

a) $x \ln x = 50$ b) $\frac{1}{2}x - 5 = \ln x$ c) $\sin(x) = 2(x+1)$

Machen Sie nach jedem Schritt die Einsetzprobe, bis die jeweiligen Gleichungen auf der rechten und linken Seite nicht mehr als ± 0.1 auseinander sind.

OPTION: Testen Sie (mit Excel oder Maple) *verschiedene* rekursive Folgen (also verschiedene Wege, nach x aufzulösen) aus. Was funktioniert, was nicht?

² Bringen Sie also die Gleichung in eine Form $x = g(x)$ (*mehrere* Möglichkeiten!), wählen Sie einen (oder verschiedene) Startwerte x_0 und bilden Sie die rekursive Folge $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = \dots$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 01./02.12.20 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 2.8 O()-Notation

(a) Ordnen Sie den Folgen (i)-(iv) ein möglichst einfaches und "billiges" O(B) zu.

	Folge	O()-Notation
	$2n^3 - n^2$	$O(n^3)$
(i)	$120n^5 + n^8 - n^7$	
(ii)	$\frac{n^4 + n^2}{n - 1} - \frac{n^4 + 2n^2}{n + 1}$	
(iii)	$2n \cdot \sin(n) + n^2 \cos(n)$	
(iv)	$n \lg(n) \cdot (-1)^n + 4n$	

(b) Entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3 in nachfolgender Tabelle: Welcher Algorithmus ist jeweils für große n schneller?

[Die Folgen $A_n, \dots, F_n$ seien Laufzeiten als Funktion der Problemgröße n.]

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 - 5$
Fall 2	$C_n = 100n + \frac{n^2}{10!}$	$D_n = \frac{3n^2 - 5}{10!}$
Fall 3	$E_n = \frac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50}$	$F_n = \frac{(n + 1)!n}{(n - 1)!(n + 1)^2}$

[Hinweis: Bilden Sie jeweils „Erster / Zweiter“]

(noch) Zahlssysteme

Aufgabe 2.9

Lösen Sie bei (a) – (c) nach x auf und vereinfachen Sie die Terme bei (d) – (f):

(a) $e^x = 2e^{-x+2}$ (b) $\ln(x) + \ln(x + 2) = 0$

(c) $\ln(x) - \ln(x + 2) = 0$

(d) $\frac{(n + 1)!}{(n - 1)!}$ (e) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n + 1)!}$ (f) $\frac{\binom{n}{2}}{n(n - 1)}$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 01./02.12.20 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 2.10**Modulare Arithmetik / Prüfziffern**

- a) Berechnen Sie möglichst effizient und ohne Taschenrechner
- (i) $(99 \cdot 236) \bmod 5$ (ii) $(27 + 82 \cdot 13) \bmod 4$ (iii) $(9^{125} + 567 \cdot 8 - 1) \bmod 8$
(iv) $(2^{50} + 38) \bmod 4$ (v) $(2^{50} + 38) \bmod 7$
- b) Welche Prüfziffer p macht 0-9380-2191- p zu einer gültigen ISBN ?
- c) Es wird die ISBN 0-8380-2191- p eingegeben (mit dem p aus Teil b)), also ein Einzelfehler an der zweiten Stelle. Wird der Fehler erkannt?
- d) Jetzt passiert noch ein weiterer Fehler an der dritten Stelle, 0-8x80-2191- p wird eingegeben. Für welche Ziffern x wird **kein** Fehler festgestellt?