Übungsblatt 4 Differentialrechnung

Aufgabe 4.1 Ableitungen

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und die 1. Ableitung an

(a) $f(x) = ax^2 \sin(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$ (b) $f(x) = e^{\sin(x^2)} + e^{\sin^2 x}$

(c) $f(x) = x^x$ (d) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-c \cdot x + d}}$ mit $c > 0$ (e) $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$

Aufgabe 4.2

In welchen Intervallen ist $f(x)$ (streng) monoton fallend / wachsend?

In welchen Intervallen ist $f(x)$ konvex / konkav?

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = xe^{-x}$

Hinweis: Argumentieren Sie mit 1. bzw. 2. Ableitung

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Plots in Maple!

Aufgabe 4.3 Taylor-Polynom

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades $P_3(x)$ zu $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Wie lautet die Restglied-Formel für $P_3(x)$ im Bereich $x \in [-0.3, 0.3]$?

Machen Sie die Probe: Stimmt die Abschätzung für $x=0.25$ und $x=0.3$?

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $P_2(x)$ zu $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Wie lautet die Restglied-Formel für $P_2(x)$ im Bereich $x \in [0, 0.5]$?

Machen Sie die Probe: Stimmt die Abschätzung für $x=0.25$?

Bereiten Sie die Aufgaben für den 05./06.01.21 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 4.4 L'Hospital

Arbeiten Sie die Informationen in Kapitel 5.5 des Skriptes durch und berechnen Sie damit folgende Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(3x)}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos(5x)}{5x^2} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

Hinweis: Überprüfen Sie jeweils, ob die Voraussetzungen für L'Hospital erfüllt sind (und welche)!

HINWEIS zu (d): Hier muss man erst geeignet umformen, dass ein Ausdruck $\frac{f(x)}{g(x)}$ entsteht. Von den

zwei möglichen Arten, dies zu tun, hilft nur eine wirklich weiter!

(e) Betrachten Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right]$. Rechnen Sie ihn aus, (i) indem Sie

beide Terme auf einen Hauptnenner bringen und vereinfachen und (ii) indem Sie für beide Brüche getrennt L'Hospital benutzen und dann vereinfachen. ACHTUNG: Es kommt etwas Verschiedenes heraus, also Widerspruch! Wieso ist Methode (ii) falsch?

Aufgabe 4.5 Kurvendiskussion

Führen Sie für folgende Funktionen eine verkürzte Kurvendiskussion durch

- max. Definitionsbereich,
- Grenzwertverhalten bei $\pm\infty$ und bei Definitionslücken,
- Extremstellen,
- Wendepunkte,
- zum Abschluss qualitative Skizze der Funktion machen

$$(i) f(x) = x \frac{|x| + 1}{x - 1} \quad (ii) f(x) = ax \cdot \ln(|ax|) \quad \text{mit} \quad a > 0$$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Maple!

Aufgabe 4.6 Näherungsformel

(a) Leiten Sie die für kleine $|x|$ gültige Näherungsformel $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$ her.

(b) Wie groß ist der Fehler maximal nach Restglied-Formel, wenn Sie $g(x)$ für $x \in [-0.5, 0.5]$ durch dieses Polynom annähern? Bzw. wenn $x \in [0, 0.5]$?

(c) Verbessern Sie diese Näherungsformel! Wie groß ist der Fehler jetzt?

Skizzieren Sie Funktion und Polynome in Maple!

Bereiten Sie die Aufgaben für den 05./06.01.21 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 4.7 Extremwerte 1: Dosen

Ein Dosenfabrikant möchte Tomatensuppe im Volumen V je Dose möglichst kostengünstig in zylindrische Konservendosen verpacken (Höhe h , Radius r). Welches Verhältnis h/r wählt er, um die Blechmenge je Dose zu minimieren?

Aufgabe 4.8 Extremwerte 2: Abstand Graph – Ursprung

Welcher Punkt des Graphen von $f(x)$ hat die kürzeste Entfernung vom Ursprung?

(a) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

(b) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

HINWEIS zu (b): Additionstheorem benutzen und Zeichnung machen. Man muss nicht unbedingt eine transzendente Gleichung lösen.