

ü O-Notation

	Folge a_n	$\mathcal{O}()$
(2)	$7n^5 + 26n^6$	$\mathcal{O}(n^6)$
(3)	$n + 3n^2 - 2n \log(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
(4)	$\frac{n^4 + n^2}{n + 5}$	$\mathcal{O}(n^3)$ (s. u.)
(5)	$\frac{n^4 + n^2}{n + 5} - n^3$	$\mathcal{O}(n^2)$

zu (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 + 26n^6}{n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} + 26 = 26 \quad \checkmark \text{ beschränkt}$

NR. zu (4) $\frac{n^4 + n^2}{n + 5} = \frac{n(n^3 + n)}{n(1 + \frac{5}{n})} = \frac{n^3 + n}{1 + \frac{5}{n}} \Rightarrow \text{Vermutung } b_n = n^3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2}{(n + 5) \cdot \frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2}{n^4 + 5n^3} = 1 \quad \checkmark \text{ beschränkt}$

NR zu (5): schwierig weil Term $\infty - \infty \Rightarrow \text{Ausweg}$

Hauptnenner: $\frac{n^4 + n^2}{n + 5} - \frac{n^3(n + 5)}{n + 5} = \frac{n^4 + n^2 - n^4 - 5n^3}{n + 5}$

$a_n = \frac{n^2 - 5n^3}{n + 5} \rightarrow \text{Vermutung } b_n = n^2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5n^3}{(n + 5) \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5n^3}{n^3 + 5n^2} \stackrel{\text{g.P.f.W.}}{=} \frac{5}{1} \quad \checkmark \text{ beschränkt}$

Modulare Arithmetik

Nicht erlaubt ist Kürze

Bsp $2 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \pmod{6}$

$$8 = 20 \pmod{6} \quad (\text{Rest } 2)$$

Nicht erlaubt $1:4$

$$2 = 5 \pmod{6} \quad \checkmark \text{ falsch}$$

Deshalb: In der Mod-Welt NICHT Gleichungen durch gemeinsamen Faktor dividieren

Beispiel: Was ist Prüfziffer p
bei ISBN 3-446-19873- p ?

Lsg: $10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + p = 0 \pmod{11}$

$$250 + p = 0 \pmod{11} \quad | -220 - 22$$

$$8 + p = 0 \pmod{11} \quad | + 3$$

$$11 + p = 3 \pmod{11}$$

$$\underline{\underline{p = 3}} \pmod{11}$$

Übung Prüfziffer

1) zeige, dass $3-446-91873-3$ eine ungültige ISBN ist
 Zahlendreher $\uparrow$
 P

$$\text{Lsg. } 10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0 \pmod{11}$$

$$261 = 0 \pmod{11} \quad | -220 - 33$$

$$8 = 0 \pmod{11} \quad \nabla$$

2) Für welche x ist
 $x-446-91873-3$

eine scheinbar gültige ISBN

$$10x + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 3 = 0 \pmod{11}$$

$$10x + 231 = 0 \pmod{11}$$

$$10x = 0 \pmod{11}$$

Für welche x ist diese Gleichung richtig

x	10x	
0	0	✓
1	10	—
2	20	—
⋮	30	⋮
9	90	—

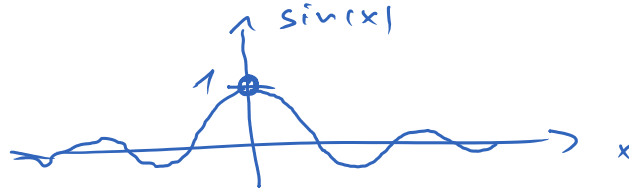
$\Rightarrow$ nur für $x=0$ entsteht
 eine scheinbare gültige ISBN

$$\begin{array}{r} \text{TR - Trick} \\ 261 : 11 = 23.72 \\ - 23 \\ \hline 0.72 \\ x 11 \Rightarrow 8 \end{array}$$

Grenzwert bei Funktionen

Was ist $\frac{\sin x}{x}$ wenn x gegen Null geht

x	1.0	0.3	0.1	0.01
$\sin x / x$	0.841	0.985	0.998	0.99998



Vermutung

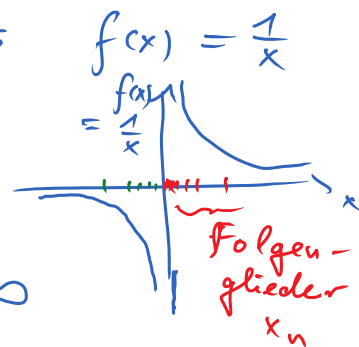
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\checkmark)$$

Beispiel Wie zeigt man mit S4-1, dass keinen Grenzwert für $x \rightarrow 0$

Lsg Nehme $x_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$\text{Berechne } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$\Rightarrow$ keine Konvergenz



Beispiel für $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{Vermutung } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Bew. $x_n = n^2$ oder n^3 oder ... mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

Genauer: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\frac{1}{-\infty} = 0$$