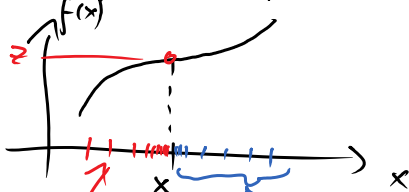


Grenzwert bei Funktionen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = z \quad (z \text{ ist der Grenzwert})$$

$\Leftrightarrow$ Jede Folge $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ erfüllt $f(x_n) = z$



$x_n \rightarrow x_0$

linksseitig ($x_n < x_0$)

Grenzwert z_-

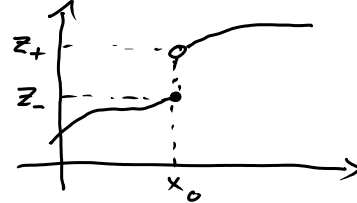
$x_n \rightarrow x_0$

rechtsseitig ($x_n > x_0$)

Grenzwert z_+

$$z_- = z_+$$

$\Leftrightarrow f(x)$ hat Grenzwert $z = z_- = z_+$ bei x_0



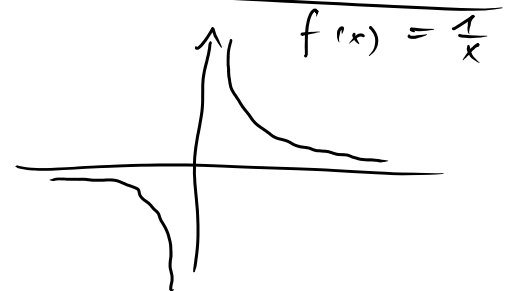
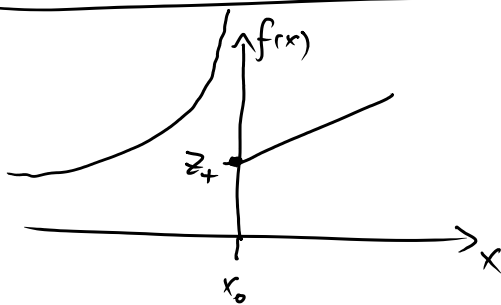
$f(x)$ hat Sprung bei x_0

$$z_- \neq z_+$$

$\Leftrightarrow f(x)$ bei x_0 nicht konvergt

$\Leftrightarrow$ hat keinen Grenzwert z

$f(x)$ hat linksseitigen GW z_- und rechts " GW z_+



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$$

$f(x)$ hat bei x_0 keinen linksseitigen Grenzwert (z_- existiert nicht als Zahl)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} = +\infty \quad (\text{bestimmt-divergent})$$

Rechtsseitige GW z_+ existiert



- hat keinen GW, da Umgebung von $x_0 = 0$ nicht def.
- hat aber rechtsseitigen GW $z = 1$, da rechtsseitige Umgebung von $x_0 = 0$ def

Übung Grenzwerte

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x+1) \cos(x-1) + \frac{\sin(x-1)}{x+1} \right] = \left[(1+1) \overset{1}{\cos(0)} + \frac{\overset{0}{\sin(0)}}{1+1} \right]$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+2}{x-1} - \frac{x^2+2x+3}{x^2-1} \right] = \frac{3}{0} - \frac{6}{0} = \infty - \infty \quad \checkmark$$

Regel 5
Hauptnenner

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2+3x+2 - (x^2+2x+3)}{(x-1)(x+1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

N.R. $x^2 - 1 = x^2 - 1^2$
 $= (x-1)(x+1)$ (3. Bin. Formel)
 $\Rightarrow$ Hauptnenner ist $(x-1)(x+1)$

↳ störende Term im Nenner (weil er vor hindert dass man $x=1$ einsetzen kann)

Warum ist $\frac{3}{0} - \frac{6}{0} = \infty - \infty$?

Warum ist $\frac{3}{0} = \infty$?

Antwort: $\frac{3}{0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{eine Folge die gegen 3 konvergiert}}{\text{eine Folge die gegen 0 konvergiert}}$

$$\text{z.B.} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n = \infty$$

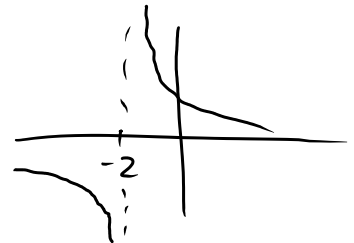
Weitere Beispiele

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}$$

Einsetzen $\frac{2^2 + 2(-2) + 2}{2 - 2} = \frac{2}{0}$ ist unklar
ob $+\infty$
oder $-\infty$

linksseitig: $\lim_{x \rightarrow (-2)-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2} = \frac{2}{0-} = -\infty$

rechtsseitig: $\lim_{x \rightarrow (-2)+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2} = \frac{2}{0+} = +\infty$



$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 2)^2} = ?$$

Nun bleibt Nenner positiv, egal ob ich von links oder rechts komme

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{(x + 2)^2} =$$

Einsetzen: $\frac{(-2)^2 + (-8) + 4}{0^2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{(x + 2)^2} = \underline{\underline{1}}$$

Lsg 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 2)^2} = \frac{2}{0+} = +\infty$

Kurzform

linksseitig: $x_n = -2 - \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 2x_n + 2}{(x_n + 2)^2} = \frac{x_n^2 + 2x_n + 2}{\left(-2 - \frac{1}{n} + 2\right)^2} = \frac{x_n^2 + 2x_n + 2}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{(-2)^2 - 4 + 2}{0+} = \frac{2}{0+} = \infty$$

auf jeden Fall positiv $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0+$

rechtsseitig: $x_n = -2 + \frac{1}{n}$

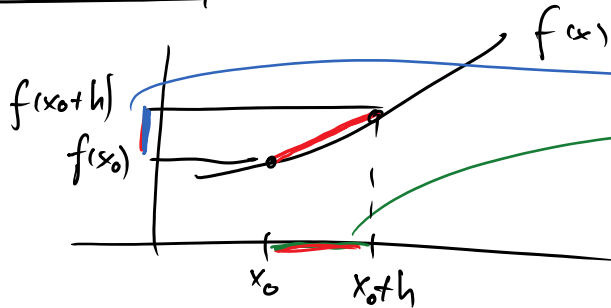
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 2x_n + 2}{\left(-2 + \frac{1}{n} + 2\right)^2} = \dots = \frac{2}{0+} = \infty$$

$$4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} = \underline{\underline{2x}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 \\
 f'(x) &= 2x
 \end{aligned}$$

Differentialquotient



Steigung:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Differenzenquotient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Differentialquotient, Ableitung
von $f(x)$ an
der Stelle x_0

Beispiel $f(x) = x^2$ Was ist $f'(x)$?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \underline{\underline{2x}}$$