Differentialrechnung

Übung

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

NR
$u = x^3$, $u' = 3x^2$
$v = (x+1)^2$, $v' = 2(x+1)\cdot 1$

$$f'(x) = \frac{vu' - v'u}{v^2}$$

$$= \frac{(x+1)^{\cancel{2}\,1}\, 3x^2 - 2\cancel{(x+1)}\cdot x^3}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(x+1)\,3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x+1)^3}$$

Einschub / Tipp

$f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

Einfacher als Quotientenregel $f(x) = x^{-1}$

$\Rightarrow$ $f'(x) = -1x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, $f'''(x) = -6x^{-4}$

$f(x) = \frac{1}{(x+1)^5} = (x+1)^{-5}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = -5(x+1)^{-6}\cdot 1$

Weiter in der Übung

b) $f(x) = \sin(x^3)$

$f'(x) = \cos(x^3)\cdot 3x^2$

Kettenregel
äußere Funktion $f_1(u) = \sin(u)$
$f_1'(u) = \cos(u)$
innere Funktion $f_2(x) = x^3$
$f_2'(x) = 3x^2$

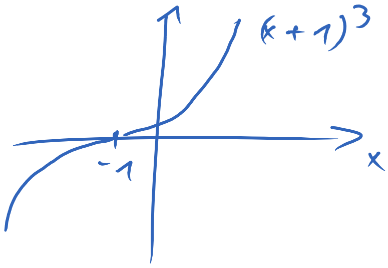
c) $h(x) = \exp(\sin(x^2))$

$= \exp(\sin(x^2))\cdot\cos(x^2)\cdot 2x$

$\exp(x) = e^x$

Ableitung Betragsfunktion

$f(x) = |(x+1)^3|$



Fallunterscheidung

1. Fall: $(x+1)^3 > 0 \iff x > -1$

$f(x) = (x+1)^3$

$f'(x) = 3(x+1)^2$

2. Fall: $(x+1)^3 < 0 \iff x < -1$

$f(x) = -(x+1)^3$

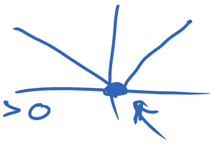
$f'(x) = -3(x+1)^2$

Beide Fälle $f'(-1) = 0$ ist def.

$f(x) = |x|$

$f'(x) = +1$ f $x > 0$

$f'(x) = -1$ f $x < 0$



Knick

$f'(0)$ ist nicht def.

$f(x) = |x^2| = x^2$

Taylorpolynom

Bsp: Taylorpoly für $f(x) = \ln(x)$ um $x_0 = 1$ der Ordnung $n=3$
Darüber $f(1.5) = \ln(1.5)$ berechnen

Lsg

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln(x)$	0
1	$1/x = x^{-1}$	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$2x^{-3}$	2
4	$-6x^{-4}$	

$$\Rightarrow P_3(x-\underset{=1}{x_0}) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{(-1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

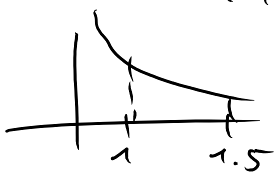
$$\boxed{P_3(x-1) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3}$$

$$P_3(1.5-1) = \frac{10}{24} = 0.41\overline{6} \approx \ln(1.5)$$

Restgliedabschätzung für $x \in [\underset{x_0}{1}, \underset{\text{Näherungsstelle}}{1.5}]$

C ist obere Schranke für $|f^{(4)}(x)| = |-6x^{-4}| = 6x^{-4}$
im Intervall $[1, 1.5]$

Weil $|f^{(4)}(x)|$ monoton fallend ist, ist der linke Rand eine obere Schrank $C = 6 \cdot 1^{-4} = 6$



$$|R_n(x)| = \frac{6}{4!}|x-1|^4 \qquad |R_n(1.5)| = 0.0156$$

Probe $\left|\ln(1.5) - \frac{10}{24}\right| = 0.01120 < |R_n(1.5)|$ ✓

Taylor-Poly Sinus

$n = 5$, $x_0 = 0$

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	

$$P_5(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5$$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$P_5(0.3) = 0.295520$$

Restglied: grobe Abschätzung für C ist $C = 1$ weil $|f^{(6)}(x)| = |-\sin(x)|$ ist nie größer als 1

$$|R_5(x)| = \frac{1}{6!}x^6 \Rightarrow |R_5(0.3)| = 1 \cdot 10^{-6}$$

Extremwerte

$f(x) = x^3 - 3x^2$ Wo liegen welche Extremwerte

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \iff (3x-6)x = 0$

$\iff (x-2) \cdot 3x = 0$

$\iff x = 2 \vee x = 0$

sind Kandidaten f. Extrema

$f''(x) = 6x - 6$

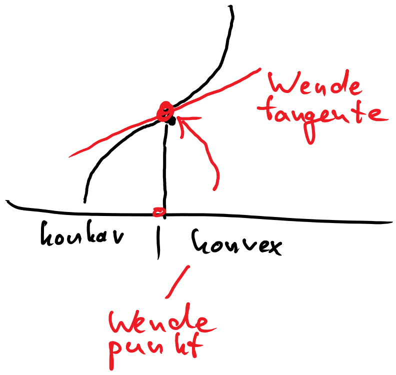
$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ rel. Maximum bei $x = 0$

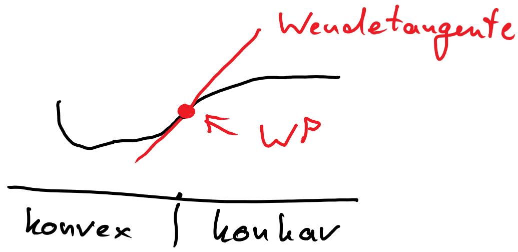
$f''(2) = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ " Minimum bei $x = 2$

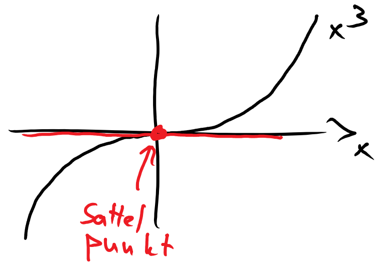
Wendepunkt

ein Punkt an dem $f(x)$ das Krümmungsverhalten wechselt (von konvex → konkav

oder " konkav → konvex)







Bsp Produktionskosten

Für welche Jahreszahl t wird

$$f(t) = \frac{k}{t} + 100 + 3t^3$$

minimal? (mit $k = 90\,000$)

Lsg: $f'(t) = -\frac{k}{t^2} + 9t^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 9t^4 = k = 90\,000$$

$$\Leftrightarrow \quad t^4 = 10\,000$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 10$$ (nur positive t)

Ist das Minimum?

$f''(t) = 2k\frac{1}{t^3} + 18t \quad > 0$ wenn $k>0,\ t>0$

$f''(10) > 0 \quad \Rightarrow$ also Minimum