Lineare Algebra

Die Lineare Algebra ist ein Teilgebiet der Mathematik und beschäftigt sich in strengem Sinne mit der mathematischen Struktur des Vektorraums und linearen Abbildungen zwischen diesen. Das bedeutet auch die Untersuchung linearer Gleichungssysteme und damit eng verbunden auch die Untersuchung von Matrizen.

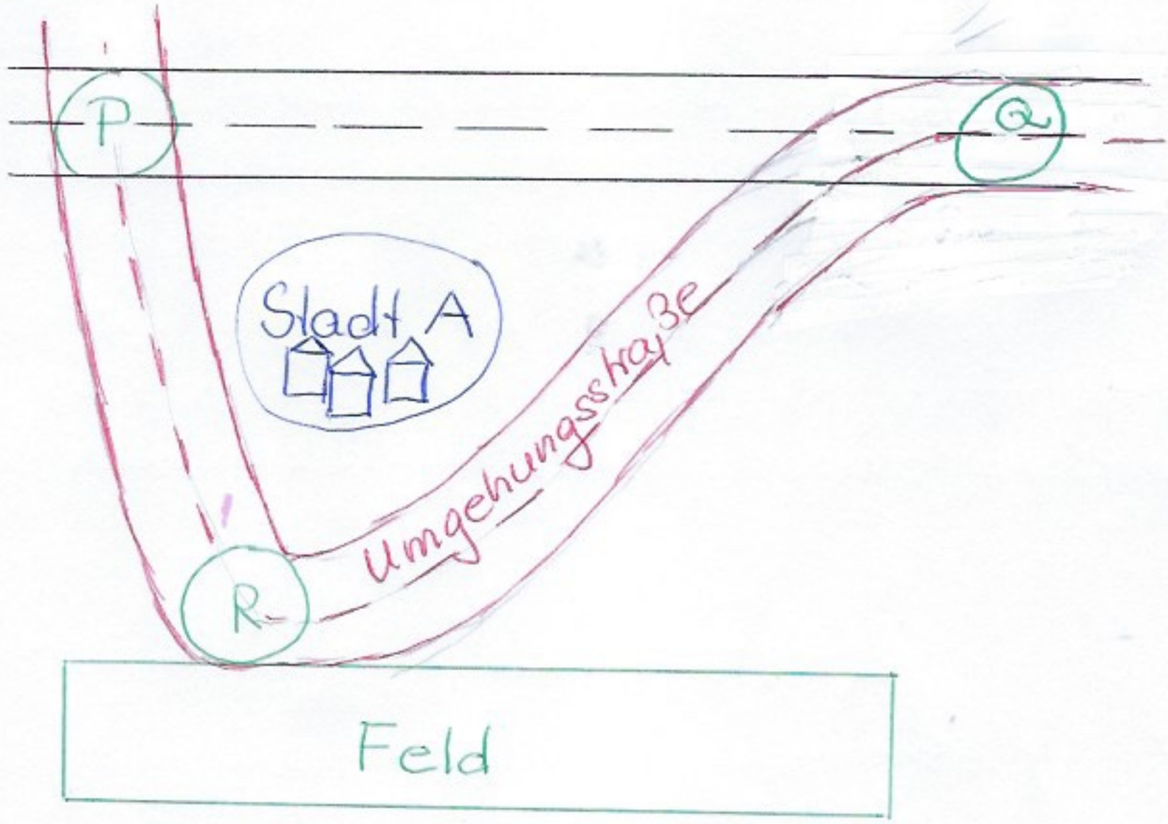
Wir haben mit den einleitenden Worten schon eine ganze Menge von neuen Begriffen genannt, die im Laufe dieses Kapitels besprochen werden:

Vektoren
Linearität
Matrizen
lineare Gleichungssysteme
(Determinanten)

Ziel in dieser Vorlesung ist es, sämtliche Grundlagen zu vermitteln, die zur Lösung eines linearen Gleichungssystems notwendig sind. Lineare Gleichungssysteme treten nicht nur bei der algebraischen Behandlung von Problemen in der Geometrie auf. Sie finden ebenso Anwendung zur Lösung von Problemen in der Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie.

Bevor die grundlegenden Begriffe und Definitionen aus der Vektorrechnung und Matrizenrechnung eingeführt werden, ein Beispiel, das auf ein lineares Gleichungssystem führt.

Bp.: Der Straßenverlauf einer geplanten Umgehungsstraße um einen Ort A werde beschrieben durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades und soll verlaufen wie in der folgenden Skizze:



Die bestehende Straße von P nach Q habe einen geradlinigen Verlauf. Zur Orientierung und für die spätere Berechnung haben P und Q folgende Koordinaten:

$P(-1/0) \quad Q(3/0)$

Die geplante Umgehungsstraße "berühre" in $R(0/-3)$ ein parallel zur bestehenden Straße verlaufendes Feld. In Q münde die Umgehungsstraße in die bestehende Straße "krümmungsruckfrei", d. h. Umgehungsstraße und vorhandene Straße haben im Mündungspunkt Q dieselbe Steigung.

Mathematische Formulierung des Problems:

Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Frage: Wieviele Unbekannte müssen bestimmt werden?

Antwort: Die zu bestimmenden Unbekannten sind a, b, c, d und e

Die im Text gegebenen Bedingungen werden nun mathematisch übersetzt:

Die Umgehungsstraße geht durch P, Q und R, d. h. die Koordinaten erfüllen die Gleichung der ganzrationalen Funktion 4. Grades:

"Punktproben"

$P(-1|0)$: I $a(-1)^4 + b(-1)^3 + c(-1)^2 + d(-1) + e = 0$

$Q(3|0)$: II $a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3 + e = 0$

$R(0|-3)$: III $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = -3$

In Q und R ist die Steigung der gesuchten Funktion 0, also $y' = 0$

$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

"Auswertung Steigung"

$Q(3|0)$: IV $4 \cdot a \cdot 3^3 + 3 \cdot b \cdot 3^2 + 2 \cdot c \cdot 3 + d = 0$

$R(0,-3)$: V $4 \cdot a \cdot 0^3 + 3 \cdot b \cdot 0^2 + 2 \cdot c \cdot 0 + d = 0$

Man stellt die Gleichungen übersichtlicher dar:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I}: & a - b + c - d + e = 0 \\
\text{II}: & 81a + 27b + 9c + 3d + e = 0 \\
\text{III} & e = -3 \\
\text{IV} & 108a + 27b + 6c + d = 0 \\
\text{V} & d = 0
\end{array}
$$

Man hat also 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten, wobei hier zwei schon direkt bestimmt sind: $e = -3$, $d = 0$

Das lineare Gleichungssystem sieht wie folgt aus:

$e = -3$
$d = 0$

$$\begin{aligned} a - b + c &= 3 \\ 81a + 27b + 9c &= 3 \\ 108a + 27b + 6c &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 81 & 27 & 9 & 3 \\ 108 & 27 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

erweiterte Koeffizientenmatrix

Was im Laufe der Vorlesung vorgestellt wird:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 81 & 24 & 9 \\ 108 & 27 & 6 \end{pmatrix}}_{(3\times3)\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{(3\times1)\text{-Matrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(3\times1)\text{-Matrix}}$$

Matrix
Matrizenmultiplikation

Def.: Lineares Gleichungssystem allgemein:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

n Unbekannte, m Gleichungen

Gauß'scher Lösungsalgorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems.

Bis es soweit ist, muss eine ganze Anzahl von Begriffen und Zusammenhängen eingeführt und vorgestellt werden.

Zu Beginn steht die "Einführung" in die Vektorrechnung.

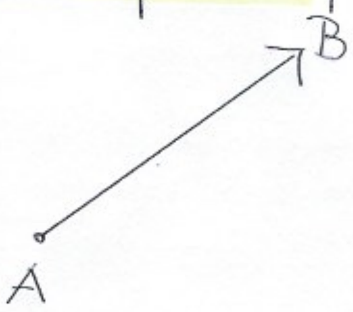
Frage: Was ist ein Vektor?

Einführung in die Vektorrechnung

Während bislang mit Zahlen gerechnet wurde, die eventuell mit einer Größenangabe versehen waren (Länge, Gewicht, etc.), Skalare genannt, sind Vektoren noch durch Angabe einer Richtung gekennzeichnet.

Def. (Vektor): Unter einem Vektor versteht man eine Größe, die durch die Angabe von Maßzahl und Richtung vollständig beschrieben wird.
Die Länge des Vektors ist durch den Betrag gegeben, die Richtung des Vektors durch die Pfeilspitze.

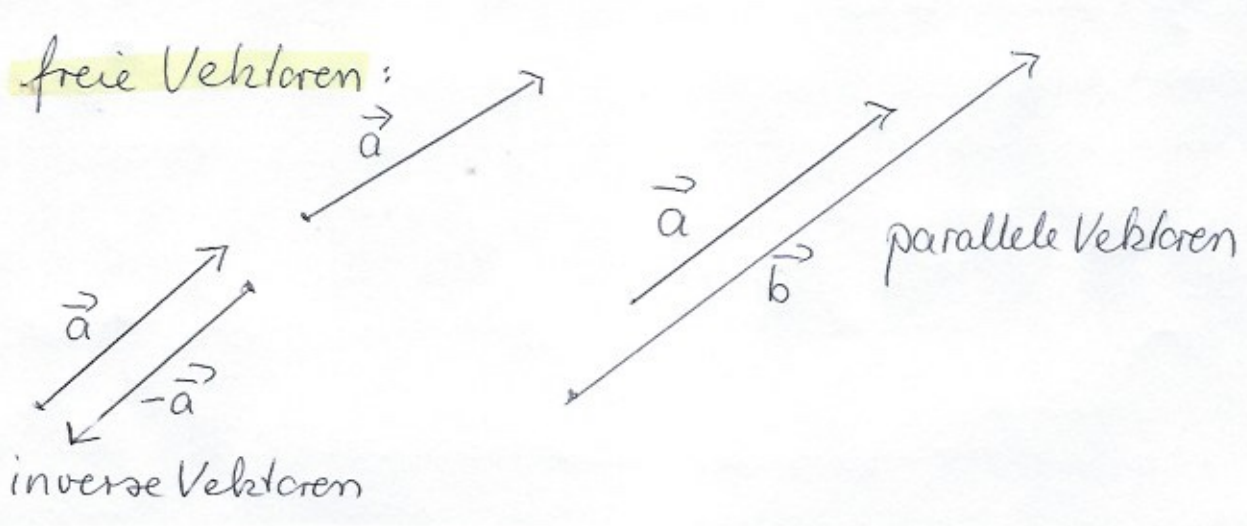
Ein Vektor lässt sich eindeutig durch Anfangs- und Endpunkt festlegen



Schreibweise

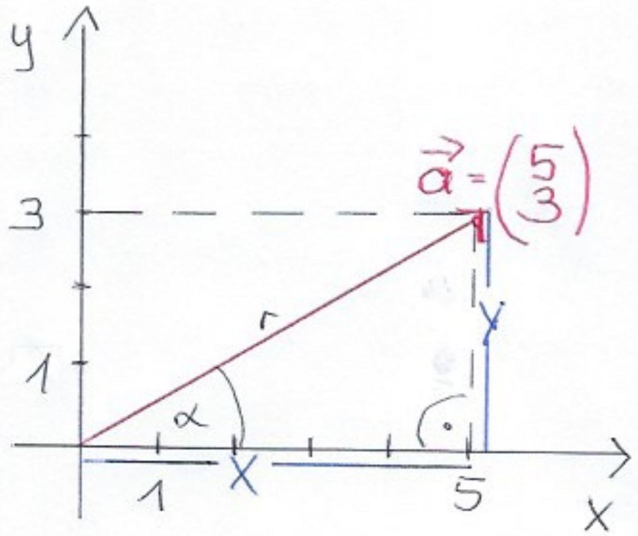
$\overrightarrow{AB}$

freie Vektoren:



Um mit Vektoren rechnen zu können, ist es notwendig, diese "in einem Koordinatensystem" anzuordnen, "zu verschieben"

Beispiel: Kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$



Koordinatendarstellung
(→ später mehr, auch mehr als zwei Dimensionen)

Alternativ zur Koordinatendarstellung kann man den Vektor auch durch seine Länge r und den Winkel α, den er mit der Abszisse (x-Achse) des Koordinatensystems einschliesst, beschreiben.

Frage: Wie bestimmt man die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und den Winkel α?

Antwort: Länge über Pythagoras:

$$5^2 + 3^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 34 \Rightarrow r = \sqrt{34}$$

Winkel über Tangens:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{3}{5} \approx 31^\circ$$

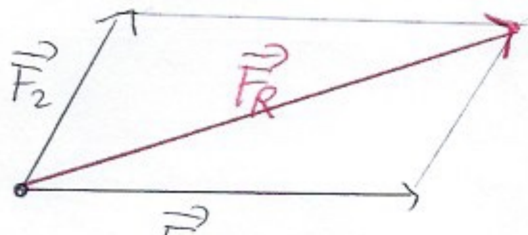
Durch Betragsstriche $|\vec{a}|$ wird die Länge des Vektors gekennzeichnet.

Weitere Begriffe: $\vec{0}$ Nullvektor : Länge: 0
$\vec{e}$ Einheitsvektor : Länge : 1

Vektoroperationen – Rechnen mit Vektoren

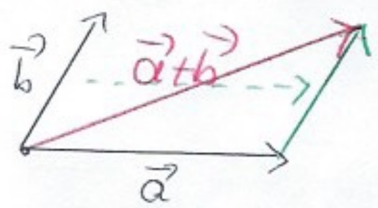
1) Addition von Vektoren

Aus der Physik: Zwei am gleichen Massenpunkt angreifende Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ können zu einer resultierenden Kraft $\vec{F_R}$ zusammengefasst werden, die die gleiche physikalische Wirkung erzielt wie die beiden Einzelkräfte zusammen.
Konstruktion der resultierenden Kraft mit Hilfe des "Kräfteparallelogramms":



Und das ist die Regel zur Vektoraddition:

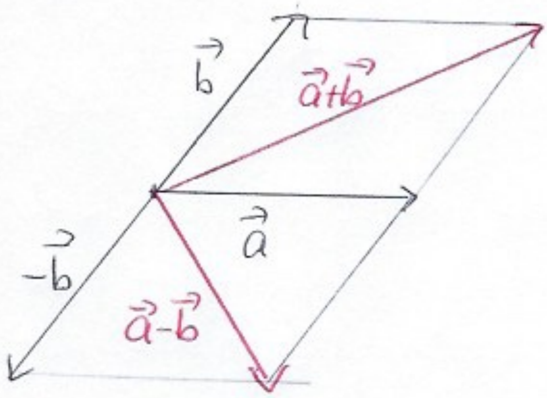
Def.: $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren



$\vec{a}+\vec{b}$ (Addition):
der Vektor $\vec{b}$ wird solange parallel verschoben, bis sein Anfangspunkt auf den Endpunkt von $\vec{a}$ fällt.
der vom Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ zum Endpunkt des verschobenen Vektors $\vec{b}$ gerichtete Vektor, ist der Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$

Der Summenvektor lässt sich auch als gerichtete Diagonale in dem aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ konstruierten Parallelogramms gewinnen.
(s. Kräfteparallelogramm oben)

ebenso: $\vec{a}-\vec{b}$



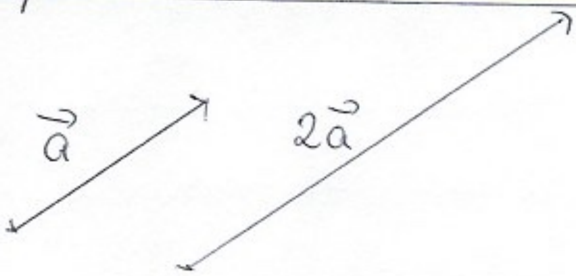
$\left.\begin{matrix}\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{a}-\vec{b}\end{matrix}\right\}$ Diagonalen im "aufgespannten" Parallelogramm

Werden mehr als zwei Vektoren addiert, so spricht man von einem Vektorpolygon.

Rechenregeln für die Addition:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \text{(Kommutativgesetz)}$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$

2) Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar:



$2\vec{a}$ ist doppelt so lang wie $\vec{a}$

Geg: $\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\lambda \cdot \vec{a}$ ist das λ-fache von $\vec{a}$ und hat die Länge $\lambda \cdot |\vec{a}|$

Frage: Gibt es wie in $\mathbb{R}$ und der Multiplikation von Zahlen, auch eine Multiplikation von Vektoren?

Antwort: Ist schwierig, da Richtung und Länge eines Vektors "verarbeitet" werden müssen

Für Vektoren werden folgende "Produkte" definiert:

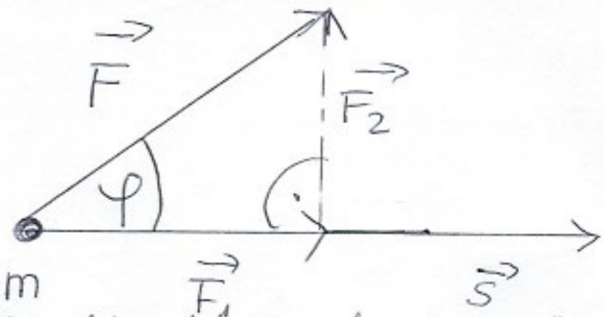
3) Skalarprodukt

Frage: Was sagt der Name Skalarprodukt?

Antwort: Skalar ist eine Zahl, d.h. das Ergebnis des Skalarprodukts, das aus zwei Vektoren gebildet wird führt aus der Menge der Vektoren raus, ist kein Vektor mehr, sondern eine Zahl, ein Skalar.

Herleitung:

Physik: Arbeit an einem Massenpunkt



$\vec{F}$ sei eine Kraft, die auf einen Massenpunkt m wirke. m bewegt sich aufgrund dieser Krafteinwirkung geradlinig in Richtung $\vec{s}$ auf einer geraden Schiene.

Der Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$ sei φ.

$\vec{F}$ kann in die Teilkräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ zerlegt werden:

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ (Vektoraddition).

Zur Bewegung von m trägt nur $\vec{F_1}$ bei. Die Arbeit W, die $\vec{F}$ an m auf dem Weg $\vec{s}$ verrichtet ist daher

$W = |\vec{F_1}| \cdot |\vec{s}|$ (Kraft × Weg)

Es ist:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{F}|} \quad \begin{matrix}\text{Ankathete}\\ \text{Hypotenuse}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{F_1}| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi \quad \text{und}$$

$$W = |\vec{s}| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos\varphi$$

Def: (Skalarprodukt)

$\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\quad \varphi = \sphericalangle \vec{a}, \vec{b} \quad 0 \le \varphi \le \pi$

Unter dem Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man die reelle Zahl c mit

$$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Schreibweise $\quad c = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Bem: Ist $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$, so ist $c = 0$

Bem: Das Skalarprodukt hat keinen Vektor zum Ergebnis, sondern eine reelle Zahl (SKALAR)

Bem: Da $|\vec{a}| \ge 0$ und $|\vec{b}| \ge 0$, ist das Skalarprodukt
für $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ positiv (der cos ist positiv)
für $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ negativ (der cos ist negativ)

Eigenschaften des Skalarprodukts

Frage: Ist das Skalarprodukt kommutativ?
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$?

Antwort: Ja

Es gilt weiter: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 > 0$ falls $\vec{a} \neq \vec{0}$

(folgt aus $|\vec{a}| > 0$ und $\cos 0 = 1$

$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (ohne Beweis)

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (Distributivgesetz)

(ohne Beweis)

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ (Begründung $\cos 90° = 0$)

($\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander)

Frage: Gilt $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$?

Antwort: Nein, überlegen Sie, warum

Bem: Ebenfalls existieren beim Skalarprodukt kein Neutralelement und kein inverses Element.

Was kann man mit den Informationen über das Skalarprodukt bis hierher machen?

Berechnung von Winkel zwischen Vektoren

Bp: Man kennt $\vec{a}\cdot\vec{a} = 16$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = 25$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 15$

Gesucht $\sphericalangle \vec{a},\vec{b} = \varphi$

Aus den Voraussetzungen erhält man: $|\vec{a}| = 4$
$|\vec{b}| = 5$

Es ist $\vec{a}\cdot\vec{b} = 15 = 4\cdot 5\cdot\cos\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = 41{,}4°$

Die zweite Möglichkeit, ein "Produkt" zwischen Vektoren zu bilden, liefert das Vektorprodukt, das an dieser Stelle lediglich definiert wird. Sie können sich jederzeit damit im Selbststudium näher beschäftigen, oder aber, Sie kennen es schon aus der Schule.

Auch hier kann man eine Herleitung aus der Physik heranziehen (Berechnung des Drehmoments M eines um einen festen Punkt drehbaren starren Körpers)

4) Def.: (Vektorprodukt)

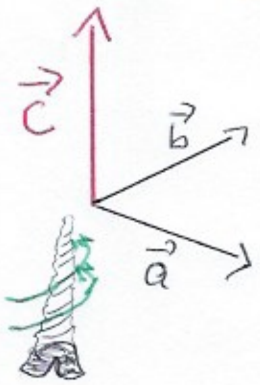
$\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren, nicht gleich dem Nullvektor
$\vec{a}$ nicht parallel zu $\vec{b}$ $(\vec{a} \nparallel \vec{b})$
$\varphi = \sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b}$ $\quad (0 < \varphi < \pi)$

Unter dem Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (auch Kreuzprodukt genannt, in Zeichen: $\vec{a} \times \vec{b}$) versteht man den Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften:

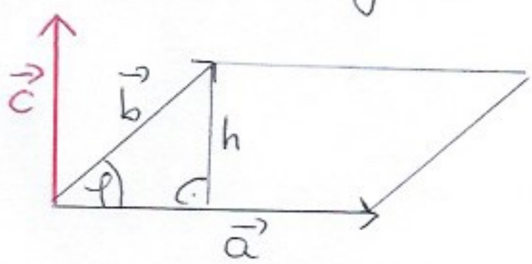
(1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

(2) $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem, d.h. $\vec{c}$ weist in die Richtung, in der eine Schraube gedreht wird, wenn man sie von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$ über den kleineren Winkel dreht.



Geometrische Deutung:



$\frac{h}{|\vec{b}|} = \sin\alpha$

$h = |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$|\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = |\vec{c}|$$

Die Maßzahl der Länge von $\vec{c}$ ist gleich der des Flächeninhalts des Parallelogramms.

Vektorrechnung unter Verwendung eines Koordinatensystems – Komponentendarstellung

Ein erster Hinweis auf die Koordinatendarstellung von Vektoren erfolgte auf Blatt 6.

Um die Vektorrechnung auf vielfältige Probleme anwenden zu können, sollen nun Vektoren mit Hilfe reeller Zahlen dargestellt werden. Nur mit dieser Darstellung eröffnet sich auch die Möglichkeit, die Ebene (Dimension 2), den 3-D-Raum zu verlassen und in den n-dimensionalen Vektorraum vorzudringen, Dimensionen, die wir uns nicht mehr vorstellen können.

Vorbemerkungen:

Gegeben $\vec{a}$ und $\vec{b}$, es sei $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a}$, d.h. $\vec{b}$ und $\vec{a}$ sind parallel und $\vec{b}$ ist $\frac{2}{3}$ von $\vec{a}$ lang.

$\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a}$ kann umgeformt werden: $3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$ (*)

In Worten ausgedrückt: Wenn man vom Dreifachen des Vektors $\vec{b}$ das Zweifache des Vektors $\vec{a}$ subtrahiert, erhält man den Nullvektor.

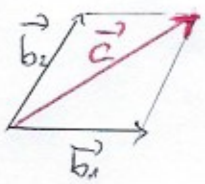
Der Nullvektor kann als Linearkombination des Vektors $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ((*)) dargestellt werden.

Def. (Linearkombination)

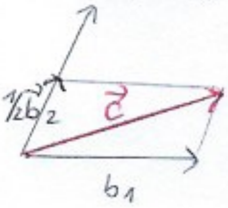
Geg: $\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}$

$\vec{a}$ heißt Linearkombination von $\vec{b_1}, \ldots \vec{b_n}$, wenn gilt: $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \ldots + \lambda_n \vec{b_n}$ $(\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R})$

Bp.



$\vec{c} = 1 \cdot \vec{b_1} + 1 \cdot \vec{b_2}$



$\vec{c} = 1 \cdot \vec{b_1} + \frac{1}{2}\vec{b_2}$

Def. (Linear abhängige Vektoren)

$\vec{b_1}, \dots \vec{b_n}$ heißen linear abhängig $\Leftrightarrow$ es ex. $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null sind mit

$$\lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \dots + \lambda_n \vec{b_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b_i} = \vec{0}$$

Bp: Vorbemerkung Blatt 13:

$3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$ $\quad 3, 2 \neq 0 \quad$ $\vec{a}, \vec{b}$ lin. abhängig

Def. (Linear unabhängige Vektoren)

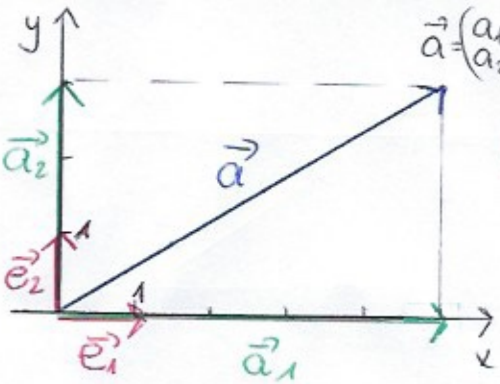
Gilt $\lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \dots + \lambda_n \vec{b_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b_i} = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, so heißen $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots \vec{b_n}$ linear unabhängig

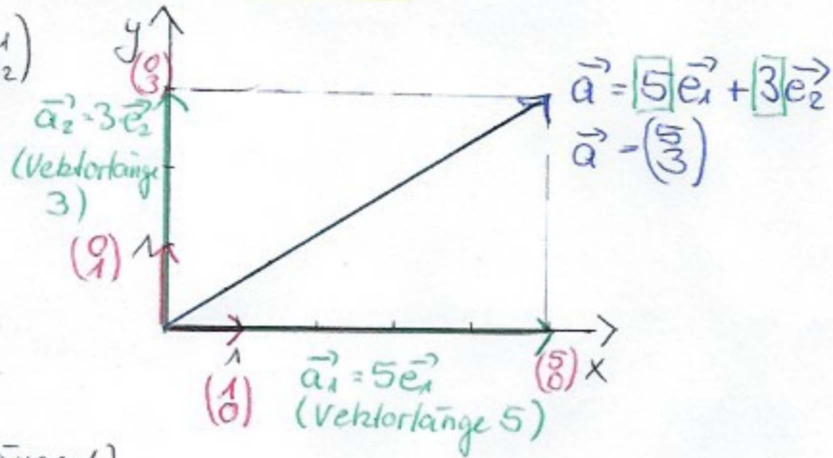
Merke: Abhängig: der Nullvektor ist als Linearkombination der $\vec{b_1} \dots \vec{b_n}$ darzustellen

Unabhängig: der Nullvektor lässt sich nicht als Linearkombination darstellen

Parallele Vektoren sind linear abhängig

Mit den Begriffen Linearkombination, lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit, ist man in der Lage, Koordinaten eines Vektors zu definieren.





$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ Einheitsvektoren (Länge 1)

$\vec{a_1} = |\vec{a_1}| \cdot \vec{e_1}$

$\vec{a_2} = |\vec{a_2}| \cdot \vec{e_2}$ $\qquad \vec{a} = |\vec{a_1}| \cdot \vec{e_1} + |\vec{a_2}| \cdot \vec{e_2}$

$|\vec{a_1}| := a_1 \quad |\vec{a_2}| := a_2$

$\vec{a}$ lässt sich als Linearkombination der beiden Einheitsvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ schreiben.
Jeder Vektor in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$) lässt sich als Linearkombination der beiden Einheitsvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ (die senkrecht aufeinanderstehen) schreiben.

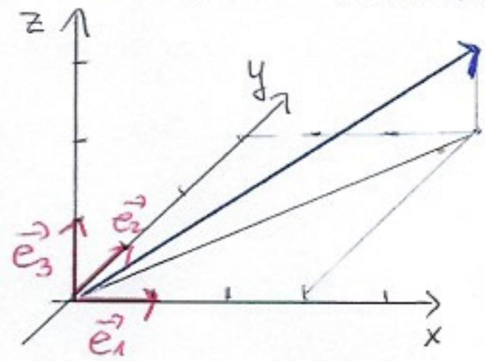
$\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Aus den Vektoren einer Basis (im $\mathbb{R}^2$ sind das immer zwei linear unabhängige Vektoren) kann man durch Linearkombinationen alle anderen Vektoren des $\mathbb{R}^2$ erzeugen.

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2}$$
$$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}$$

sind für weitere Rechnungen besonders "handliche" Basisvektoren.

Zweidimensionale Vektoren sind also auch als geordnete Punktepaare (Koordinatendarstellung) aufzufassen.

Betrachtet man nun den $\mathbb{R}^3$ (3D-Raum)



$$\vec{a} = 3\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 1 \cdot \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Basis im $\mathbb{R}^3$

Dehnt man die Betrachtungsweise auf den n-dimensionalen Raum aus ($\mathbb{R}^n$), so enthält dieser alle n-dimensionalen Vektoren. Solche Räume bezeichnet man als Vektorräume. Der Begriff der Basis spielt auch hier eine wichtige Rolle.