Bei den Matrizen: $A^2 = A \cdot A$ mit $A \neq E$, $A \neq 0$

Bp: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

In $\mathbb{R}$: $b \cdot c = 0 \Rightarrow b = 0$ oder $c = 0$

Bei den Matrizen: $B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer Matrix

Nach der Definition der Matrizenmultiplikation ist es naheliegend zu fragen, ob es auch ein "inverses" Element gibt, so wie bei der Multiplikation der reellen Zahlen:

$$a \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a} = a^{-1} \quad (a \neq 0)$$

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

An welchen Stellen das "inverse Element" bei den Matrizen eine Rolle spielt, werden wir an entsprechender Stelle besprechen.

Def. (Inverse Matrix)

A $(n \times n)$-Matrix (quadratische Matrix)

B heißt inverse Matrix von A (kurz: die Inverse von A)

$\Leftrightarrow$ $A \cdot B = B \cdot A = E$ (Einheitsmatrix) Schreibweise: $B = A^{-1}$

Besitzt A eine inverse Matrix, so heißt A regulär

Besitzt A keine inverse Matrix, so heißt A singulär

Ohne Beweis; Satz: Jede reguläre Matrix besitzt genau eine Inverse

Wie berechnet man eine inverse Matrix?

Dass das nicht so einfach ist, soll am Beispiel einer (2×2)-Matrix gezeigt werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ sei regulär, d.h. besitzt eine Inverse

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$ sei die gesuchte Inverse von A: A^{-1}

Es gilt:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

d.h.:
$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} &= 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

4 Gleichungen mit 4 Unbekannten

Die exakten Umformungsschritte werden abgekürzt und man erhält: $x_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_{11}$

und weiter:
$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{11} &= a_{22} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{21} &= -a_{21} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{12} &= -a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{22} &= a_{11} \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzt man $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(später werden wir sehen, warum man "D" wählt)

Damit ist
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ $\quad D = 12 \cdot 11 - 20 \cdot 1 = 112$

$$A^{-1} = \frac{1}{112} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie: $A \cdot A^{-1} = \frac{1}{112} \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rechenregeln für inverse Matrizen

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

(3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(4) $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Anwendungsbereiche der Matrizen

(1) Materialbedarfsmatrizen bei Produktionsprozessen

Bp: Eine Firma produziert Wochenendhäuser der Typen Alb, Rhön und Taunus.
In einer Materialbedarfsmatrix werden die unterschiedlich benötigten Mengen an Stahl, Holz, Glas und Arbeitsstunden dargestellt:

$$M := \begin{array}{c} \\ \text{Alb} \\ \text{Rhön} \\ \text{Taunus} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeitsstunden} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \quad (3 \times 4)\text{-Matrix}$$

Der Auftrag $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Alb} & \text{Rhön} & \text{Taunus} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \quad (1 \times 3)\text{-Matrix}$

wird ebenso in einer Matrix dargestellt.

Frage: Wie berechnet man den Materialbedarf für diesen Auftrag?

Antwort: $$A \cdot M = (5\ 6\ 12)\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{cccc} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeit} \\ (139 & 162 & 134 & 391) \end{array}$$

Nun sei $P = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$ die Preismatrix für je eine Materialeinheit Stahl, Holz, Glas, Arbeit

(4×1)-Matrix

Frage: Wie berechnet man die Herstellungskosten für ein Haus jeden Typs, wie für den Auftrag?

Antwort: $$M \cdot P = \underset{(3\times 4)}{\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 692 \\ 885 \\ 696 \end{pmatrix}}$$

Herstellungskosten für den Auftrag:

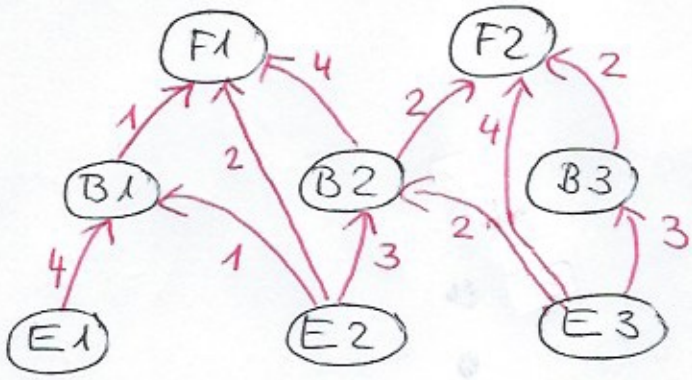
$$A \cdot (M \cdot P) = (A \cdot M) \cdot P = (139\ 162\ 134\ 391)\begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$= 17122$$

(2) Technologische Matrix

Die technologische Matrix eines Planungsproblems oder eines mehrstufigen Produktionsprozesses enthält alle Produktionsfaktormengen (das können Rohstoffe, Einzelteile, Zwischenprodukte sein, die eventuell auch nur begrenzt zur Verfügung stehen), die zur Fertigung eines Endproduktes notwendig sind.

Bp.: Zweistufige Fertigung: Aus drei Einzelteilen E1, E2, E3 werden über drei Baugruppen B1, B2, B3 zwei Endprodukte F1 und F2 gefertigt. Die Planung wird mittels eines Graphen dargestellt:



Gozintograph

"the part that goes into"

Im SS werden wir Graphen mit Knoten und Kanten usw. im Abschnitt Graphentheorie eingehend besprechen.

Aus diesem Gozintographen kann eine sog. Teilebedarfsmatrix aufgestellt werden:

$$T := \begin{array}{c} \\ F1 \\ F2 \\ B1 \\ B2 \\ B3 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F1 & F2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 15 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (8 \times 2)\text{-Matrix}$$

Überlegen Sie, wie die Koeffizienten in der Teilebedarfsmatrix errechnet wurden.

Die Bearbeitung und Montage der Produkte laufe auf den Maschinen M1 – M5, in einer Zeitbedarfsmatrix Z werden die benötigten Zeiteinheiten für die Produktion der einzelnen "Koeffizienten" dargestellt:

$$Z := \begin{array}{c} \\ M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} F1 & F2 & B1 & B2 & B3 & E1 & E2 & E3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & 0.1 & & & 0.2 & 0.5 & \\ & & & 0.2 & & & 0.4 & 0.6 \\ & & & & 0.2 & 0.6 & & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & & & 0.3 & \\ & 0.7 & & 0.1 & 0.5 & & & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$$

der Übersicht halber wird auf die "Nullen" verzichtet

Bei vielen Planungsaufgaben muss die begrenzte Kapazität der Maschinen berücksichtigt werden, so dass die Information, wie lange jede Maschine durch die Fertigung einer Mengeneinheit jedes Endproduktes belegt ist.

Frage: Wie lässt sich das in diesem Beispiel berechnen?

Antwort: $A = \underset{(5\times 8)}{Z} \cdot \underset{(8\times 2)}{T}$

$$A := \begin{array}{c} \\ M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F1 & F2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8.4 & 3 \\ 11.6 & 11.2 \\ 3.2 & 1.8 \\ 6.9 & 2.7 \\ 1.2 & 3.3 \end{pmatrix}_{(5\times 2)} \end{array}$$

Bitte in Ruhe nochmals die Matrizenmultiplikation nachrechnen

Frage: Was kann man aus dieser Matrix A ablesen?

Antwort: Z.B. Maschine M3 ist für die Fertigung eines F2 1.8 Zeiteinheiten belegt.

Frage: Es geht folgende Bestellung ein: $B := \begin{array}{c} \\ F1 \\ F2 \end{array} \begin{array}{c} \text{Stück} \\ \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}_{(2\times 1)} \end{array}$

Wie sind die Maschinen für diesen Auftrag belegt?

Antwort: $\underset{(5\times 1)}{A \cdot B} = \begin{array}{c} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{array} \begin{pmatrix} 990 \\ 1720 \\ 410 \\ 825 \\ 285 \end{pmatrix}$

Weitere Matrizen:

Netzwerkmatrizen

"Aus Graphen werden Matrizen"
wird im SS21 genau besprochen:

Adjazenzmatrix
Inzidenzmatrix

Rang einer Matrix

Zur Erinnerung: Lineare Unabhängigkeit von Vektoren (Blatt 14)

Die Zeilen bzw. Spalten einer Matrix werden auch als Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren bezeichnet. Wir werden im Abschnitt Lineare Gleichungssysteme sehen, dass es von Bedeutung ist, dass jede Gleichung eine neue Information liefert. In einer Matrix (später werden wir eine Matrix als "Abkürzende Schreibweise" für die Bearbeitung von linearen Gleichungssystemen verwenden) ist es von Wichtigkeit ob eine Zeile einer Matrix von einer anderen Zeile linear unabhängig ist.

Def. (Rang einer Matrix)

Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten einer Matrix A wird als der Rang der Matrix A bezeichnet.

Schreibweise: $rg(A)$

Bem: Für jede Matrix gilt: Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spalten

(Zeilenrang = Spaltenrang)

Bp:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(E) = 4$$

(die Einheitsvektoren sind linear unabhängig)

Bem.: Für den Rang einer $(m \times n)$-Matrix A gilt:

$$rg(A) \leq \min\{m,n\}$$

Bem.: A heißt regulär $\Leftrightarrow$ A^{-1} ex. $\Leftrightarrow$ A besitzt den vollen Rang, $rg(A) = \min\{m,n\}$

Wie bestimmt man den Rang einer Matrix?

Es gilt: Jede $(m \times n)$-Matrix kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix von Zeilenstufenform überführt werden.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$(m \times n) \to$ Matrix

Elementare Zeilenumformungen sind folgende äquivalente Umformungen:

I. Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
II. Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile
III. Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile
IV. Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile

Diese Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.

Liegt eine Matrix in Zeilenstufenform vor, so muss man, um den Rang einer Matrix zu ermitteln, die Zeilen zählen, die nicht ausschließlich aus Nullen bestehen. Diese Zeilen sind linear unabhängig.

Da gilt: Zeilenrang = Spaltenrang genügt es, die für uns angenehmere Perspektive der Zeilenumformung zu wählen.

Bp.:

1

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 2.\text{Zeile} \cdot \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2.\text{Zeile} - 1.\text{Zeile} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$$

2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \\ \cdot 2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +\text{Zeile } 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 19 \\ \cdot 2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -\text{Zeile } 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 0 & -93 \end{pmatrix} \begin{array}{l} :-14 \\ :38 \\ :-93 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{21}{14} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{95}{38} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = 3$$